

# Introduction to Topology

@snaka0213

最終更新：2014年8月

## 概要

本稿は2部構成となっている。前半ではトポロジーという幾何学を紹介する。この分野において、図形を大雑把な形で分類することは非常に重要な主題となっている。しかし、扱う図形の範囲が広大で分類の際には困難を伴うことが多い。そこで、情報量が多い対象である図形から、ある特定のデータを取り出して情報量を減らす手法がトポロジーでは基本的となる。ここまでの説明を一通り終えた後、そのような手法の最も単純な例としてオイラー数を紹介する予定である。後半ではベクトル場の幾何学を紹介する。ベクトル場の零点には指数という零点周りの巻き具合を表す指標が考えられるが、今回はこの指数に関する魅力的な定理を紹介する心算である。

## 1 トポロジーとは?

### 1.1 位相空間

我々はこれまで様々な図形と触れ合ってきた。馴染み深いものとして、平面内の直線や曲線、多角形や円、空間内の多面体や球面などがあるだろう。それらはどれも3次元ユークリッド空間の部分集合として実現されている。そのユークリッド空間には2点間がどれほど離れているかを測る距離というものがある。

**復習 1.1** ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の2点  $x, y$  の距離  $\|x - y\|$  を次で定義する。

$$\|x - y\| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

現代数学においては、距離による具体的な近さや遠さを一般化して、単に近さと遠さのみを抽出した位相という概念が考えられている。この位相が定まっている集合を位相空間といい、トポロジーが扱う図形もこの一般的な位相空間である。今回紹介するトポロジーの道具はどれも一般の位相空間に対しても適用できる便利なものなのだが、如何せん位相空間論から解説を始めるとそれだけで大半の時間を要してしまうだけでなく、とても抽象的かつ一般的なもので正直つまらない。そのような理由から、本稿で扱う位相空間は全て次のようなユークリッド空間の部分集合に限定する。これでも十分にトポロジーの醍醐味は味わえると思われるので、位相空間論をあまり知らない読者でも安心して先に進んでいただきたい。

**例 1.2 (球面)** ユークリッド空間  $\mathbb{R}^{n+1}$  の原点を中心とした半径1の球面  $S^n$  は位相空間である。

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

**例 1.3 (トーラス)** 位相空間  $T^2$  を次で定義し、以降これをトーラスと呼ぶ。

$$T^2 := \{(2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v\} \in \mathbb{R}^3 \mid -\pi \leq u, v \leq \pi\}.$$

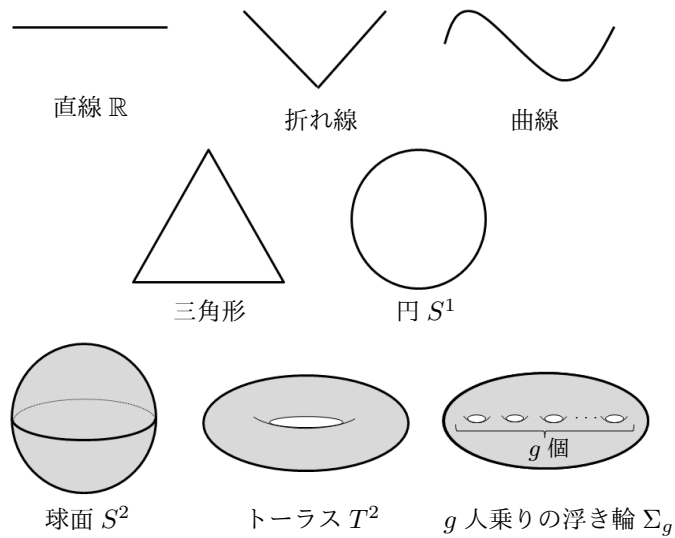


図1 位相空間の例.

## 1.2 同型の考え方

位相空間を扱う際にはさまざまな困難がある. 今回扱う位相空間はユークリッド空間内の図形に限定しているのだが, それでも非常に難しい問題が山ほど存在する. その難しさを理解してもらうためにも, 数学の至る所に現れる「同型」という考え方について説明しよう.

例 1.4 次の二つの集合を考えてみよう.

$$\{1, 2\}, \{a, b\}.$$

ただ素朴に集合のみを扱うとき, 異なる元がいくつ存在するかという性質のみを気にする. 例えば, 何かものを数えるときに「1, 2, 3, ...」と勘定しようが「a, b, c, ...」と勘定しようが, ものを数えるという役割として違いは全くない. 集合に含まれる元の個数が等しい, というのをしっかりと定義するには全単射 (一対一対応) という概念を用いればいい. 与えられた二つの集合  $A, B$  の間に全単射な写像が存在するとき, その二つの集合は同型であるという.

例 1.5 中学校で扱った三角形について思い出してみよう. 二つの三角形が平行移動と回転で移りあうとき, その二つの三角形は合同であるという. 平行移動と回転という操作は, 三角形の辺の長さや内角を変えない操作であるのに注意されたい. 三角形自体の性質 (面積や二等分線の振る舞いなど) を扱うとき, 三角形をどこから眺めるかは本質には影響しないので, 合同な三角形を区別する意味はないと結論することができる. これも同型という考え方的一种である.

例 1.6 群  $G, H$  と写像  $f: G \rightarrow H$  について,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

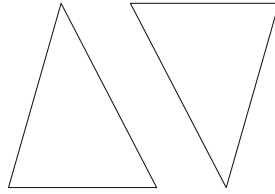


図2 合同な三角形

が任意の  $x, y \in G$  に対して成り立つとき,  $f$  は準同型写像であるという. 準同型写像とは, 演算によって定まった群の構造を保つ写像である. 全単射な準同型写像が存在したとき, 二つの群  $G$  と  $H$  は同型であるという. ここで, 準同型写像の逆写像はまた準同型写像であることに注意しよう. 同型な群は互いに構造を保つ写像によってそれぞれ一対一の対応がついているので, 群の代数構造自体のみを気にするときには同型な群を区別する意味はない.

例 1.7 体  $K$  上の線型空間  $V, W$  と写像  $f: V \rightarrow W$  について,

$$\begin{aligned}f(x+y) &= f(x) + f(y), \\f(ax) &= af(x)\end{aligned}$$

が任意の  $x, y \in V$  とスカラー  $a \in K$  に対して成り立つとき,  $f$  は線型写像であるという. 線型写像とは, 演算と作用によって定まった線型空間の構造を保つ写像である. 全単射な線型写像が存在したとき, 二つの線型空間  $V$  と  $W$  は同型であるという. ここで, 線型写像の逆写像はまた線型写像であることに注意しよう. 同型な線型空間は互いに構造を保つ写像によってそれぞれ一対一の対応がついているので, 線型空間の代数構造自体のみを気にするときには同型な線型空間を区別する意味はない.

このように, ある構造が入った集合を定義すると, その間の写像について「構造を保つ写像」というものを考えることができる. そして, その構造を保つ写像によって互いに一対一の対応がついているとき, 二つの集合は区別せずに同一視する, というのがこの「同型」という考え方である.

では, 近さという構造が入った位相空間における「構造を保つ写像」および「同型」とはどのようなものだろうか. 次の小節で詳しく解説しよう.

### 1.3 連続写像, 位相同型

実は, 位相空間における「構造を保つ写像」の重要な例として, 高校の頃から既に馴染んでいる「連続関数」がある. なぜ「連続関数」が位相空間の「構造を保つ写像」といえるのか, それは微分積分学で学んだ連続関数の定義を見直すとよく理解できる.

復習 1.8 区間  $I \subset \mathbb{R}$  上の関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が連続であるとは, 任意の点  $a \in I$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $\delta > 0$  が存在して,  $|x - a| < \delta$  ならば常に  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  せしめられることをいう. 関数の連続性は, 点列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $a$  に収束するならば  $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$  も  $f(a)$  に収束することと同値である.

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の部分集合から  $\mathbb{R}^m$  への写像の連続性も全く同様に定義できる.

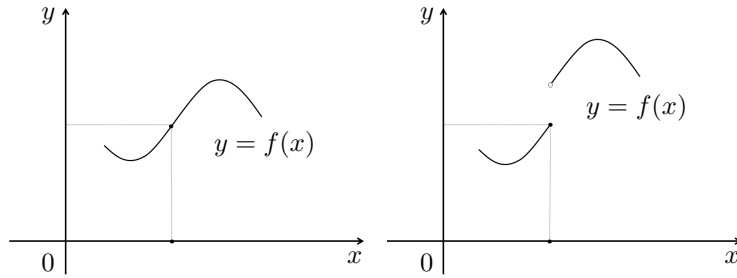


図3 左は連続であるが、右は連続ではない。

**定義 1.9** 部分集合  $D \subset \mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^m$  への写像  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  が連続であるとは、任意の点  $a \in D$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $\|x - a\| < \delta$  ならば常に  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$  せしめられることをいう。

**問題 1.10** 写像  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  について、次の (1) と (2) は同値である。

- (1)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  は連続である。
- (2)  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  と表したとき、各  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) は連続写像である。

このように、連続関数は「近くにある点を近くに移す」写像であることが分かる。位相空間とは近さという構造をもった集合であったのだから、その「構造を保つ写像」はこのような「近くにある点を近くに移す」写像であるべきだろう。事実、位相空間論ではこのようにして、微分積分学で学んだ連続関数の一般化として連続写像を定義する。区間  $I$  上の連続関数とは、厳かに言う位相空間  $I$  から位相空間  $\mathbb{R}$  への連続写像となる。

位相空間における「構造を保つ写像」が理解できたところで、いよいよその「同型」を定義しよう。

**定義 1.11** 位相空間  $X, Y$  について、全単射な連続写像  $f : X \rightarrow Y$  であって、その逆写像  $f^{-1}$  も連続であるような  $f$  が存在したとき、 $X$  と  $Y$  は位相同型 (または同相) であるという。

**例 1.12** 連続関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、 $f$  のグラフ  $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$  を考える。

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

写像  $F : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_f$  を  $F(x) := (x, f(x))$  と定義すると、これは全単射な連続写像であって、逆写像  $F^{-1}$  も連続である。特に、直線、折れ線のグラフ、 $\sin$  のグラフ等々、どれも互いに同相となる。

**例 1.13** 図4のように、三角形の内部の点を一つ固定して、それが中心の円を三角形が内部に含まれるように十分大きくとる。三角形の点  $x$  に対して、円の中心から  $x$  方向に半直線を描き、円との交点を  $f(x)$  とおこう。この写像  $f$  によって三角形と円が同相であることがわかる。以上の議論は他の多角形に対しても同様に適用することができる。したがって、円と多角形は同相である。

立体図形になっても全く同様の手法で、球面と四面体が同相であることがわかる。詳細は読者に任せよう。

このように、二つの位相空間が「同相である」ことを証明するには、実際に同相写像を構成すればよい。では逆に、「同相ではない」ことを証明するにはどうすればいいのだろうか。同相写像が存在しないことは簡単に決定できるのだろうか。

実は、この素朴な疑問がトポロジーという分野の主題となる。位相空間を同相という基準で分類する際、トポロジーでは位相不変量の概念が重要かつ基本的となる。次の小節で詳しく見ていこう。

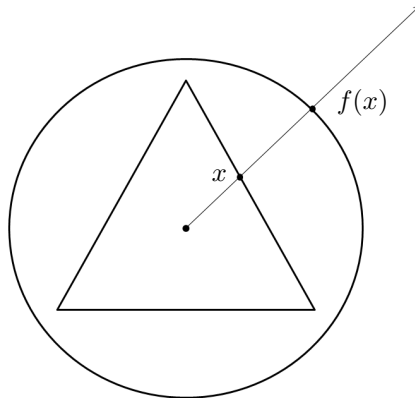


図4 三角形と円は同相である.

## 1.4 位相不変量

トポロジーで基本的となるのが,

「位相空間  $X$ 」と「位相空間  $Y$ 」が同相  $\Rightarrow$  「 $X$  のデータ」と「 $Y$  のデータ」は同じ

を満たすデータである. このようなデータを位相不変量という. 難しい対象である位相空間の議論を, 易しい対象における議論に帰着させよう, という考え方である.

**例 1.14 (弧状連結成分の個数)** 位相空間が弧状連結であるとは, 任意の二点が連続曲線 (つまり, 閉区間  $[0,1]$  からの連続写像) によって結べることをいう. 位相空間を弧状連結な部分に分けたとき, その成分の個数は位相不変量である.

弧状連結成分という概念を応用して, 簡単な位相空間の分類をやってみよう.

**命題 1.15** 円  $S^1$  と直線  $\mathbb{R}$  は同相ではない.

**証明** 仮に同相写像  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  が存在したとしよう.  $S^1$  上の点  $p$  を除いた位相空間  $S^1 - \{p\}$  は  $f$  によって  $\mathbb{R} - \{f(p)\}$  と同相である. 前者の空間は弧状連結成分の個数が 1 なのに対して, 後者は 2 である. これは矛盾であるので,  $S^1$  と  $\mathbb{R}$  は同相にはなりえない. ■

**問題 1.16** 命題 1.15 を参考に, 直線  $\mathbb{R}$  と平面  $\mathbb{R}^2$  が同相ではないことを証明せよ.

**問題 1.17** 円  $S^1$  と球面  $S^2$  は同相か? 理由もつけて答えよ.

それでは, 球面  $S^2$  とトーラス  $T^2$  は同相なのだろうか. 弧状連結成分の個数を用いても手掛かりは掴めそうにない. 一体どうすれば証明できるだろうか.

様々な方法は考えられるが, 古くから知られている位相不変量でもあるオイラー数の概念を応用すると, 実際に同相ではないことが証明される. 今回はそれを紹介しよう.

## 2 オイラー数

オイラー数について説明する前に、球面やトーラスなどに共通する概念である閉曲面の定義を述べておこう。

**定義 2.1** ( $\mathbb{R}^3$  内の閉曲面) ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $S$  が閉曲面であるとは、次を満たすことをいう。

- (1) ユークリッド空間の中で  $S$  は有界閉集合である。
- (2) 各点  $q \in S$  に対して、平面  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $D$  と  $C^\infty$  写像  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在して、次を満たす。
  - (a)  $q$  は  $p(D)$  に属し、 $p(D)$  は  $S$  に含まれる。
  - (b)  $p$  は単射である。以降、 $(a, b) \in D$  を  $p(a, b) = q$  を満たす点とする。
  - (c)  $\partial p/\partial x(a, b)$ ,  $\partial p/\partial y(a, b)$  は  $\mathbb{R}^3$  の一次独立なベクトルである。

また、 $(D, p)$  を  $q$  の座標近傍という。

**例 2.2 (球面)** 明らかに球面  $S^2$  は  $\mathbb{R}^3$  内の有界閉集合である。球面上の点  $q = (a, b, c)$  を任意の一つとると、 $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  である。 $q \in S^2$  より、 $c > 0$  とすると  $c = \sqrt{1 - (a^2 + b^2)}$  である。そこで、平面  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $D$  を  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  とおき、写像  $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  を、

$$p(x, y) := (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$$

とおくと、 $(D, p)$  は  $q$  の座標近傍となる。たった今  $c > 0$  としたが、他の場合についても同様に座標近傍の存在が証明される。以上より、球面  $S^2$  は閉曲面であることがわかった。

**例 2.3 (種数  $g$  の閉曲面)** 自然数  $g$  に対して、 $g$  個のトーラス  $T^2$  に穴を開けてそれらを貼り合せると「 $g$  人乗りの浮き輪」が完成する。これを数学用語では種数  $g$  の閉曲面といい、 $\Sigma_g$  と表す。ただし、 $\Sigma_0 = S^2$ ,  $\Sigma_1 = T^2$  である。実際にこれが閉曲面となることが容易に証明される。

**注意 2.4** 定義 2.1 の「ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$ 」という仮定を一般次元の「ユークリッド空間  $\mathbb{R}^N$ 」( $N \geq 3$ ) に変えれば「 $\mathbb{R}^N$  内の閉曲面」の定義が得られる。例えば、 $\mathbb{R}^3$  内の原点を通る直線全体の集合 (これを実射影空間という) に適当な位相を入れておくと、それは  $\mathbb{R}^4$  内のある閉曲面と同相となる。

**注意 2.5** 位相空間論の言葉に慣れている人向けに補足の説明をしておく。ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  という仮定を外して  $S$  を Hausdorff 空間とし、また定義 2.1 の (2) において平面  $\mathbb{R}^2$  というのを一般次元の  $\mathbb{R}^n$  と直し、座標近傍の  $p$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合から  $S$  の開集合への同相写像とし、また座標変換に滑らかさを仮定しておけば、これで  $n$  次元可微分多様体の定義が得られる。特に、閉曲面はコンパクトな 2 次元可微分多様体である。

さて、いよいよオイラー数の定義に入るが、前節でも注意した通り一般論からの導入は避けて、今回は閉曲面に限って定義する。これでもオイラー数の魅力は十分に伝わると思われるのでこのような配慮をした。

**定義 2.6** 閉曲面  $S$  のオイラー数  $\chi(S)$  を次の手順で定義する.

- (1) 単体複体  $K$  であって,  $K$  と  $S$  が同相となるものを一つとる. このような単体複体を  $S$  の単体分割という. ここで単体複体とは, 三角形が唯一の頂点および辺同士で貼り合ってきた図形のことをいう.\*<sup>1</sup>
- (2) 上の  $K$  に対して,

$$\chi(S) := (\text{頂点の個数}) - (\text{辺の個数}) + (\text{面の個数}).$$

**例 2.7** 正四面体, 正八面体, 正二十面体はどれも球面  $S^2$  の単体分割であり, これによってオイラー数を計算すると, どの単体分割を用いても

$$\chi(S^2) = 2$$

となることが確かめられ, 確かに単体分割の取り方によっていない. ちなみに, 多面体に対して定義 2.6 の (2) を計算すると必ず 2 となることは, 古典的にオイラーによって知られていた有名な事実である. また, 後の「オイラー数の位相不変性」を応用すると, 正多面体が 5 種類しか存在しないことが初等幾何学的に証明可能である. 詳しくは [1] を参照するといいたいだろう.

**例 2.8** 図 6 と図 7 はトーラス  $T^2$  の単体分割である. どちらで計算してもオイラー数は 0 となる.

$$\chi(T^2) = 0.$$

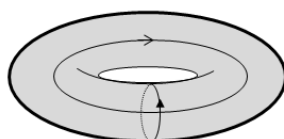


図 5 長方形を三角形に分割した後, 対辺を貼り合わせる.

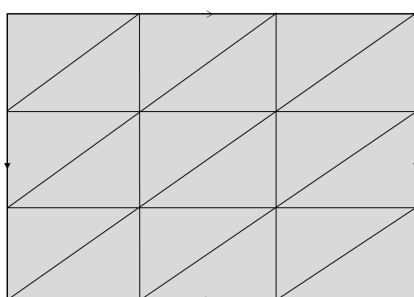


図 6 トーラス  $T^2$  の単体分割.

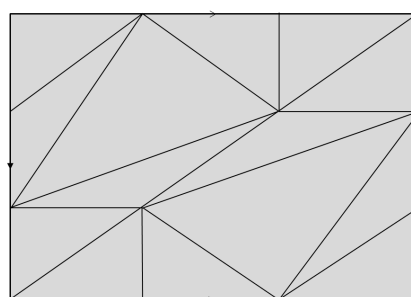


図 7 トーラス  $T^2$  の最少単体分割.

**例 2.9** 図 8 から考察するに,  $\Sigma_g$  のオイラー数は  $2 - 2g$  となる.

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g.$$

\*<sup>1</sup> 単体分割のもう少し厳密な定義を知りたい方は [1] を参照せよ.

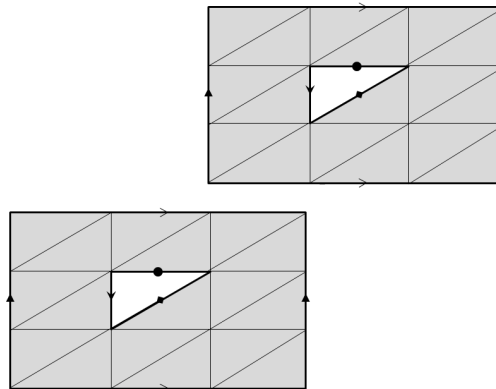


図8  $\Sigma_g$  の単体分割. 図は  $g = 2$  の場合.

上記のオイラー数の定義について心残りなのが、どの閉曲面に対しても単体分割が存在するか、そして  $\chi(S)$  が単体分割の取り方に依存しないかどうかである。今回の発表においては、とにかくトポロジーがどのような分野なのかを概観してもらうことを目的としているので、定義が上手くいっていること、およびその位相不変性については証明を省略して、以降の具体例をぜひ楽しんでほしい。どうしても証明が知りたい読者は [1] を参照せよ。

**定理 2.10** どの閉曲面にも単体分割が少なくとも一つ存在して、またオイラー数はその単体分割の取り方によらない。特に、オイラー数は位相不変量である。

**定理 2.11** 球面  $S^2$  とトーラス  $T^2$  は同相ではない。

**定理 2.12** 自然数  $g_1$  と  $g_2$  について、 $g_1 \neq g_2$  ならば  $\Sigma_{g_1}$  と  $\Sigma_{g_2}$  は同相ではない。

最後に、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の閉曲面が既に分類されている事実を証明なしで紹介しよう。このような分類定理を得ることはトポロジーの目的の一つともいえる。

**定理 2.13** ( $\mathbb{R}^3$  内の閉曲面の分類定理) ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の任意の弧状連結な閉曲面は種数  $g$  の閉曲面いずれかと同相となる。したがって、閉曲面はオイラー数によって完全に分類されたことになる。

また、他分野との関連について述べよう。幾何学とは図形を扱う分野ということができ、扱う図形の種類によって分野が細分化される。例えば微分トポロジーが扱う図形は主に可微分多様体であり、代数トポロジーは CW 複体が登場人物となる。また、6月総会に参加した読者は、代数幾何学においては代数多様体を調べることがあるのもご存知かと思う。現代数学において、これらの図形はどれも位相空間として定義される。この立場から見ると、トポロジーは他の幾何学に比べると扱う図形の範疇が非常に広いと結論できるかもしれない。事実、本稿でも紹介されたオイラー数は他のあらゆるところでも活躍している。

### 3 ベクトル場

今回はこの問題に対する解答を得ることを最終目標とする。



**問題 3.1** ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の惑星 (=弧状連結な閉曲面) があったとしよう. このとき, 無風点が全くない風を吹かすことができるのはどのような形をした惑星か? ただし, 風はどれも地表と接した方向にしか吹かないものであって, 上昇気流や下降気流は考えないものとし, 無風点はどれも孤立しているものとする.

我々はこれから数学を用いてこの問題へのアプローチを試みたいと思う. まず第一に問題をすべて数学の言葉に書き換えよう. まだ定義されていないのは「風」とその「無風点」である. そこで, まずはこの「風」をどうにかして数学的に定義したいと思う.

地表の各観測地点では, その「風」の大きさと方向が決まる. 大きさと方向を持つような数学的概念はベクトルがふさわしいだろう. つまり惑星上の「風」とは, 曲面の各点にベクトルが対応したものと言い換えられる. これが今回のテーマであるベクトル場の定義となる. ただし, これは感覚的にも明白なことであるが, 今回はベクトル場には滑らかさを仮定する. 定義を述べよう.

**定義 3.1 (曲面上のベクトル場)** 曲面  $S$  に対して,  $C^\infty$  級写像  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  を曲面  $S$  上のベクトル場という. ここで, 曲面からユークリッド空間への写像が  $C^r$  級であるとは, 各点の座標近傍を通してみるとその写像が  $C^r$  級であることをいう.

また, 今回の「風」は地表に接する方向のみの成分しか持たないので, 曲面の接平面という概念を導入するべきであろう. 定義を述べる.

**定義 3.2 (接平面)** 曲面  $S$  の各点  $q \in S$  に対して,  $q$  の接平面  $T_q S$  を,

$$T_q S := \left\{ q + s \frac{\partial p}{\partial x}(a, b) + t \frac{\partial p}{\partial y}(a, b) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

と定義する. ここで,  $p(x, y)$  は  $q$  の座標近傍であって,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  は  $p(a, b) = q$  を満たす点である.

以上の準備のもと, いよいよ惑星上の「風」を数学の言葉で完全に言い換えることができる.

**定義 3.3 (接ベクトル場)** 曲面  $S$  上のベクトル場  $X$  が各点  $q$  で  $q + X(q) \in T_q S$  を満たすとき,  $X$  を  $S$  上の接ベクトル場という.

ここまでくれば「無風点」の定義も非常に容易い. 次のベクトル場の零点がそれにあたる.

**定義 3.4** 曲面  $S$  上のベクトル場  $X$  において,  $X(q) = 0$  となる点  $q \in S$  を  $X$  の零点という.

最後にまとめとして, 今回の問題を数学の言葉で表現しなおそう.

**問題 3.2** 孤立した零点を持たないような接ベクトル場が存在するユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の閉曲面  $S$  を決定せよ.

以下, 接ベクトル場の具体例を紹介しよう.

**例 3.5** 以下の図のように,  $0$  以上の  $g$  に対して  $\Sigma_g$  上の接ベクトル場であって, 「湧きだし口」の零点と「吸い込み口」の零点が一つずつ, そして「交叉」する零点が  $2g$  個存在するベクトル場が得られる. 具体的構成については本稿の最後に述べておく.

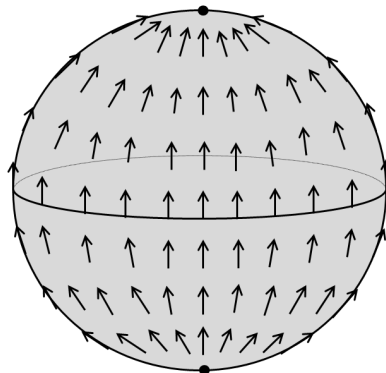


図9 球面  $S^2$  上の接ベクトル場.

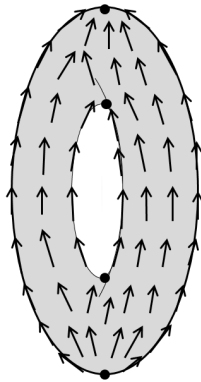


図10 トーラス  $T^2$  上の接ベクトル場.

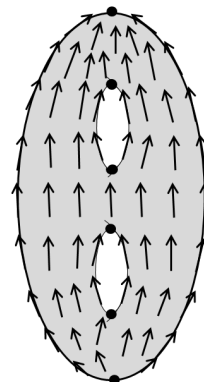


図11  $\Sigma_g$  上の接ベクトル場.

**例 3.6** 図12のように、トーラス  $T^2$  には零点を持たないような接ベクトル場が存在する。具体的構成について述べておこう。トーラス  $T^2$  上の点の一つとり、その点における0でない接ベクトルを一つとる。トーラス  $T^2$  は Lie 群でもあるので、群演算によってその接ベクトルを各点へ滑らかに平行移動させることができる。この操作によって得られたベクトル場 (左不変なベクトル場) はもちろん零点を持たない。

## 4 ベクトル場の指数

問題において気になっているのはベクトル場の零点である。そこで、ベクトル場の零点周りの巻き具合を表す指標を導入しよう。以下、非常に大雑把な説明が続くがお話だと思って気軽に読んでほしい。

**定義 4.1 (ベクトル場の指数)** 曲面  $S$  上の接ベクトル場  $X$  が、孤立しているような零点  $q$  をもつとする。  $q$  の座標近傍を用いて平面上に  $X$  を押し出すことで平面上のベクトル場が得られる。これまで通り  $q$  に対応する平面上の点を  $(a, b)$  とおこう。半径を十分小さくにとって零点を通らないような円周を平面上にとる。  $q$  にお

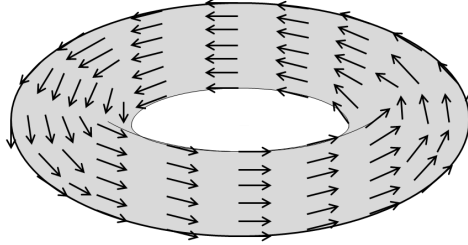


図 12 トーラス  $T^2$  上の左不変なベクトル場.

る接ベクトル場  $X$  の指数  $\text{Ind}(X, q)$  を次のように定義する.

- (1) 先ほど決めた円周の点を一つ固定する. これを始点とおく.
- (2) 始点から反時計回りに点を動かしていき, それに応じた円周上のベクトルの方向を目で追っていく.
- (3) 反時計回りに動かして最終的にまた始点に戻るまでに, ベクトル場の方向がどちら回りに何回転したかを見る. 反時計回りに  $n$  回転の場合は  $\text{Ind}(X, q) = n$ , 時計回りの場合は  $\text{Ind}(X, q) = -n$  と定める.

また, 曲面  $S$  上の接ベクトル場  $X$  に有限個の孤立した零点  $q_1, \dots, q_m$  が存在するとき, ベクトル場  $X$  の指数  $\text{Ind}(X)$  を各零点における指数の総和で定義する. 零点が存在しないときは  $0$  とおく.

$$\text{Ind}(X) := \sum_{i=1}^m \text{Ind}(X, q_i).$$

例 4.2 例 3.5 の接ベクトル場で計算すると,  $\text{Ind}(X) = 2 - 2g$  となる.

例 4.3 例 3.6 の接ベクトル場で計算すると,  $\text{Ind}(X) = 0$  となる.

上記の例で計算した指数はどれも舞台となっている閉曲面のオイラー数と一致している. 実は, これは全くの偶然ではなく, 次の **Poincaré-Hopf** の定理によって保障されている定理でもある.

**定理 4.4 (Poincaré-Hopf)** 閉曲面  $S$  上の孤立した零点を持つ接ベクトル場  $X$  に対して, 次が成り立つ.

$$\text{Ind}(X) = \chi(S).$$

この定理の証明を完璧に解説するのは筆者の力量を超えるので, この定理に関連した話題, 証明の概略, および定理を眺めて分かることについて述べておくにとどめよう.

この定理に関連した話題を述べる. 本稿で扱ったのは閉曲面の場合のみであったが, ベクトル場の指数は次元が 2 以上の多様体の上にあるベクトル場についても定義することができる概念である. どのように定義するかについて軽く説明しておこう. 本稿の定義はかなり雑なものであった. 円周を何回転したか, というのを厳密に取り扱うには写像度の概念が必要になる. この概念は円周だけではなく連結な閉多様体間の写像に対しても考えることができる. これで多様体上のベクトル場についても指数が定義できるようになる.

以下、一般次元の多様体について証明の概略を述べる。まず、定理の等式が成り立つようなベクトル場の存在が **Morse 理論** を用いることで証明される。閉多様体上の Morse 関数を一つとり、その勾配状ベクトル場によって計算すればいい。(ちなみに、本稿で実際に計算した具体例はまさに閉曲面の高さ関数という典型的な Morse 関数の勾配状ベクトル場そのものであった。) 以上より、後はベクトル場の指数がベクトル場の取り方によらないことを証明すればいいことがわかったが、その証明は [2] に詳しく解説されているので、それに譲ることとする。興味のある読者は是非参照するといいたいだろう。

最後に、この定理を眺めて分かることについて説明しておく。まず次の系が従うことに注意しておこう。

**系 4.5** 孤立した零点を持たないような接ベクトル場が存在したとき、その閉曲面のオイラー数は 0 である (実はこの逆も成り立つ)。

この系が言わんとしていることは、オイラー数は孤立した零点を持たないような接ベクトル場を作ろうとする際の「障害」となっている、ということである。

また、Poincaré-Hopf の定理における等式は興味深い解釈ができると思われる。左辺のベクトル場の指数は、ベクトル場がちょうど滑らかな写像として定義されているように、多様体上の「解析」的な量である。それに対して右辺のオイラー数はよく知られているように位相空間の位相不変量であり、多様体上の「位相」的な量である。この二つの一見関係もなさそうな量が等式で結ばれるというのは非常に美しい結果ではないだろうか。

それでは、今回の最終目標であった**問題**の解答を述べて、本稿を閉じよう。

**解答 4.1** 無風点が全くない風を吹かすことができる惑星は、トーラス  $T^2$  と同相な惑星のみである。

**レポート問題** 球面  $S^2$  上の零点がただ一つの接ベクトル場を具体的に構成せよ。

## 参考文献

[1] 田村一郎, トポロジー, 岩波全書, 1972 年.

[2] John W. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, Princeton University Press, 1997 年.