

# Topological $K$ -theory and its Applications

@snaka0213

最終更新：2016年3月

## 概要

1957年, Arbeistagung という研究会において, Grothendieck は Riemann-Roch の定理を拡張する主張を発表した. その定式化には「代数多様体上の接続層 (coherent sheaf) がなす  $K$  群」という革新的なアイデアが用いられた. これが  $K$  理論 ( $K$ -theory) の起源と云われている.

1959年, Atiyah-Hirzebruch は Grothendieck の定義を模倣して「位相空間上の複素ベクトル束がなす  $K$  群」について研究を始めた. Bott 周期性定理を用いることで, 位相空間の  $K$  群が Eilenberg-Steenrod 公理系のうち最後の公理以外を全て満たすことが証明された. その応用として, 当時の大問題であった Hopf 不変量が 1 となる次元の決定問題に対する簡明な解答が得られ,  $K$  理論は大きな注目を集める.

一方で 1961年, 可微分多様体がなす同境界環 (cobordism ring) の研究において特に重要であった Thom 複体を用いることで, Eilenberg-Steenrod 公理系のうち最後の公理を外した体系, ボルディズム群 (bordism group) が Atiyah によって定義された. このような背景のもと,  $K$  理論や同境界理論に触発され一般コホモロジー論 (generalized cohomology theory) の研究が本格的に始まった. その後, 数々の数学者によってスペクトラム (spectrum) などの概念が整備されていき, 今や一般コホモロジー論はホモトピー論 (homotopy theory) と表裏一体の関係にある, 代数的位相幾何学の重要な分野となった.

本稿では, Atiyah-Hirzebruch による位相空間の  $K$  理論の基礎と応用の解説を行う. 理論の見通しを良くするために,  $K$  理論を一般コホモロジー論の視点から理解できるように構成にした. 最後に応用として, Hopf 不変量が 1 となる次元の決定を行う.

## 目次

1	Preliminaries	2
1.1	Notations . . . . .	2
1.2	Vector Bundles . . . . .	3
2	Generalized Cohomology Theory	7
2.1	Unreduced cohomology theory . . . . .	7
2.2	Reduced cohomology theory . . . . .	8
3	$K$ -theory	10
3.1	Topological $K$ -theory . . . . .	10
3.2	Bott Periodicity . . . . .	12
3.3	History . . . . .	17
4	Applications	19

# 1 Preliminaries

## 1.1 Notations

定義 1.1 それぞれの圏を次のように表す.

- $\text{Top}$ : 位相空間と連続写像がなす圏.
- $\text{Top}^2$ : 位相空間対と対を保つ連続写像がなす圏.
- $\text{Top}_0$ : 基点付き位相空間と基点を保つ連続写像がなす圏.
- $\mathcal{CW}, \mathcal{CW}^2, \mathcal{CW}_0$ : 対象が CW 複体であるような充満部分圏.
- $\mathcal{F}, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}_0$ : 対象が有限 CW 複体であるような充満部分圏.
- $\text{Ab} / \text{Ring} / \text{Rig}$ : 可換群 / 環 / 半環<sup>\*1</sup>と準同型写像がなす圏.

位相空間に対する種々の操作を導入しておく.

定義 1.2 位相空間対  $(X, A)$  に対して, 基点付き位相空間  $X/A$  を

$$x \sim x' \Leftrightarrow x, x' \in A$$

で生成されるような  $X$  上の同値関係による商空間とおく. ここで,  $X/A$  の基点は  $A/A$  とする.  $A = \emptyset$  のとき,  $X^+ := X/\emptyset$  は基点のみからなる空間を直和した空間とする.

定義 1.3 (ウェッジ積, スマッシュ積, 錐, 懸垂) 基点付き位相空間  $X, Y$  の基点をそれぞれ  $x_0, y_0$  とする. また,  $f: X \rightarrow Y$  は基点を保つ連続写像とする. それぞれの空間を次のように表す. ここで, 単位閉区間  $I := [0, 1]$  の基点は  $0$ , 単位球面  $S^n$  の基点は  $(1, 0, \dots, 0)$  とする.

- ウェッジ積 (wedge product)  $X \vee Y := (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)$ .
- スマッシュ積 (smash product)  $X \wedge Y := (X \times Y)/(X \vee Y)$ .
- 縮約錐 (reduced cone)  $CX := X \wedge I$ .
- 縮約写像錐 (reduced mapping cone)  $C_f := CX \cup_f Y$ .
- 縮約懸垂 (reduced suspension)  $S(X) := X \wedge S^1$ .

例 1.4 スマッシュ積は結合的かつ可換な操作である. また, 自然な同相  $S^m \wedge S^n = S^{m+n}$  が成り立つ.

定義 1.5 それぞれの函手を次のように表す.

- $\rho: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$ :  $\rho((X, A)) := (A, \emptyset)$ ,  $\rho(f: (X, A) \rightarrow (Y, B)) := f|_A$ .
- $S: \text{Top}_0 \rightarrow \text{Top}_0$ :  $S(f: X \rightarrow Y) := f \wedge \text{id}: S(X) \rightarrow S(Y)$ .
- $\pi: \text{Top}^2 \rightarrow \text{Top}_0$ :  $\pi((X, A)) := X/A$ .
- $i: \text{Top}_0 \rightarrow \text{Top}^2$ :  $i(X) := (X, x_0)$ .
- $j: \text{Top} \rightarrow \text{Top}^2$ :  $j(X) := (X, \emptyset)$ .

定義 1.6 (可縮) 位相空間が一点を変位レトラクトに持つとき, その位相空間は可縮であるという

<sup>\*1</sup> 環の公理から加法逆元の存在を除いたものを満たす.

## 1.2 Vector Bundles

ここでは、ベクトル束に関する基本的事項を確認する。以下、係数体  $\mathbb{F}$  は  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  のいずれかとする。

**定義 1.7 (ベクトル束)** 位相空間  $E, B$  と連続写像  $\pi : E \rightarrow B$  の組  $\xi = (E, \pi, B)$  で次の条件を満たすものを  $\mathbb{F}$  ベクトル束 (**vector bundle**) という。

- (1) 各点  $b \in B$  に対してファイバー (fiber)  $E_b := \pi^{-1}(b)$  に  $\mathbb{F}$  ベクトル空間の構造が与えられている。
- (2) (局所自明性) 各点  $b \in B$  に対してその開近傍  $U \subset B$  と整数  $n \geq 0$  と同相写像

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{F}^n$$

が存在して、次の条件を満たす。

- (a)  $p_1$  を第一成分への射影とすると、 $p_1 \circ \varphi = \pi$  が成り立つ。
- (b) 各ファイバー上に制限すると、 $\varphi$  は  $\mathbb{F}$  ベクトル空間の同型写像となる。

上において、 $E$  を全空間 (total space),  $B$  を底空間 (base space),  $\pi$  を射影 (projection) という。また、連続写像  $s : B \rightarrow E$  であって  $\pi \circ s = \text{id}$  となるものを  $\xi = (E, \pi, B)$  の切断 (section) といい、以降、 $\xi$  の切断全体がなす  $C^0(B)$  加群を  $\Gamma(\xi)$  とおく。

ベクトル束の間の射について定義を確認しておく。

**定義 1.8 (準同型写像)** ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B), \eta = (E', \pi', B)$  に対して、連続写像  $\varphi : E \rightarrow E'$  が次を満たすとき、 $\varphi$  を準同型写像 (homomorphism) という。

- (1)  $\pi' \circ \varphi = \pi$ .
- (2) 各ファイバー上に制限すると、 $\varphi$  は線型写像となる。

準同型写像  $\varphi : E \rightarrow E'$  が全単射であって、かつ  $\varphi^{-1} : E' \rightarrow E$  が連続写像となるとき、 $\varphi$  は同型写像 (isomorphism) であるといい、そのような  $\varphi$  が存在するとき、二つのベクトル束  $\xi, \eta$  は同型であるという。

ベクトル束の具体例をいくつか挙げる。

**例 1.9 (自明束)** 位相空間  $B$  に対して、 $\varepsilon^n := (B \times \mathbb{F}^n, p_1, B)$  は  $\mathbb{F}$  ベクトル束となる。 $\varepsilon^n$  を  $B$  上の自明束 (trivial bundle) という。

**例 1.10 (接束)** 可微分多様体  $M$  に対して、 $x \in M$  とその接空間の元  $v \in T_x M$  の組  $(x, v)$  の全体を  $TM$  とおくと、 $TM$  は自然に可微分多様体となる。 $\pi(x, v) := x$  とおくと、 $\tau_M := (TM, \pi, M)$  はベクトル束となる。 $\tau_M$  を  $M$  の接束 (tangent bundle) という。

**例 1.11 (普遍束)** Grassmann 多様体  $G_n(\mathbb{F}^{n+k})$  とは線型空間  $\mathbb{F}^{n+k}$  の  $n$  次元線型部分空間全体のことであった。 $E = E(\gamma_n(\mathbb{F}^{n+k}))$  を

$$E := \{(X, v) \in G_n(\mathbb{F}^{n+k}) \times \mathbb{F}^{n+k} \mid v \in X\}$$

とおき、 $\pi : E \rightarrow G_n(\mathbb{F}^{n+k})$  を  $\pi(L, v) := L$  とおくと、 $\gamma_n(\mathbb{F}^{n+k}) := (E, \pi, G_n(\mathbb{F}^{n+k}))$  はベクトル束となる。 $\gamma_n(\mathbb{F}^{n+k})$  を普遍束 (universal bundle) という。

次に、ベクトル束に関する種々の構成方法を定義しておく。

**定義 1.12** (引き戻し, 制限) ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  と連続写像  $f: X \rightarrow B$  に対して,  $E(f^*\xi)$  を

$$E(f^*\xi) := \{(x, v) \in X \times E \mid f(x) = \pi(v)\}$$

とおき,  $\pi^*: E(f^*\xi) \rightarrow X$  を  $\pi^*(x, v) = x$  とおくと,  $f^*\xi := (E(f^*\xi), \pi^*, X)$  はベクトル束となる. このベクトル束  $f^*\xi$  を  $f$  による引き戻し (pull-back) という. 特に, ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  と部分空間  $A \subset B$  に対して, 包含写像  $i: A \rightarrow B$  による引き戻し  $\xi|_A := i^*\xi$  を  $A$  への制限 (restriction) という.

**定義 1.13** 有限次元ベクトル空間とその間の線型同型写像がなす圏を  $\mathcal{C}$  とおく. 関手  $T: \mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  であって, 任意の  $V_i, W_j \in \mathcal{C}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) に対して,

$$T: \text{Hom}(V_1, W_1) \times \cdots \times \text{Hom}(V_n, W_n) \rightarrow \text{Hom}(T(V_1, \dots, V_n), T(W_1, \dots, W_n))$$

が連続となるものを考える. 底空間が  $B$  であるベクトル束  $\xi_1, \dots, \xi_n$  に対して,  $E = E(T(\xi_1, \dots, \xi_n))$  を  $F_b = T(F_b(\xi_1), \dots, F_b(\xi_n))$  の非交和とすると,  $T(\xi_1, \dots, \xi_n) = (E, \pi, B)$  はファイバーが  $F_b$  となるようなベクトル束となる.

つまり, ベクトル空間に対する種々の操作がベクトル束に対しても同様に定義される. 例えば, ベクトル束の直和  $\xi_1 \oplus \xi_2$ , テンソル積  $\xi_1 \otimes \xi_2$ , 外積  $\xi_1 \wedge \xi_2$ , 双対  $\xi^*$  などが定義される.

**定義 1.14** ( $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$  関手) 位相空間  $B$  上の  $\mathbb{F}$  ベクトル束の同型類全体を  $\text{Vect}_{\mathbb{F}}(B)$  とおくと, これは直和とテンソル積に関して半環の公理を満たす. また, 連続写像  $f: A \rightarrow B$  に対して引き戻し  $f^*: \text{Vect}_{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}(A)$  は半環準同型である. 以上より, 関手  $\text{Vect}_{\mathbb{F}}: (\text{Top})^{\text{op}} \rightarrow \text{Rig}$  が得られた.

**定義 1.15** (部分束) ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  と部分空間  $F \subset E$  に対して,  $\eta = (F, \pi, B)$  がベクトル束となるとき,  $\eta$  を  $\xi$  の部分束 (sub bundle) という.

部分束が与えられると, それによる商束 (quotient bundle) を考えることができる.

**定義 1.16** (商束) ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$ , およびその部分束  $\eta = (F, \pi, B)$  に対して,  $E(\xi/\eta)$  を  $E_b/F_b$  の非交和とする. 自然な射影  $E \rightarrow E(\xi/\eta)$  によって商位相を導入すると,  $\xi/\eta = (E(\xi/\eta), \pi, B)$  はベクトル束となる.  $\xi/\eta$  を  $\xi$  の  $\eta$  による商束という.

次の命題は基本的である ([4]).

**命題 1.17** ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$ ,  $\eta = (E', \pi', B)$  間の準同型写像  $\varphi: E \rightarrow E'$  に対して,  $B$  上の関数  $\dim \text{Ker } \varphi_b$  が局所定数となるとき,  $\text{Ker } \varphi$  と  $\text{Im } \varphi$  はそれぞれ部分束となる.

パラコンパクト Hausdorff 空間上のベクトル束に関して種々の確認をしておく.

**補題 1.18** パラコンパクト Hausdorff 空間  $B$  上のベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  と閉部分空間  $A \subset B$  に対して,  $A$  上の切断は常に  $B$  上の切断への拡張を持つ.

**証明** 切断  $s: A \rightarrow E|_A$  が任意に与えられたとする. ベクトル束  $\xi$  の自明化被覆の一つを  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  とする. ベクトル値関数  $s|_{A \cap U_\lambda}$  は Tietze の拡張定理より  $B$  上への拡張を持つ. これらを一の分割で貼り合せて切断  $s$  の拡張を得る. ■

**補題 1.19** パラコンパクト Hausdorff 空間  $B$  上のベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$ ,  $\eta = (E', \pi', B)$ , および閉部分空間  $A \subset B$  に対して,  $A$  上の同型写像  $E|_A \xrightarrow{\cong} E'|_A$  は常に  $A$  の開近傍上へ同型写像のまま拡張できる.

**証明** 閉部分空間  $A$  上の切断  $A \rightarrow \text{Hom}(E, E')|_A$  を  $B$  上へ拡張する (補題 1.18). その拡張で同型写像全体  $\text{Iso}(E, E')$  を引き戻したものが欲しかった開近傍となる. ■

**補題 1.20 (ホモトピー不変性)** パラコンパクト Hausdorff 空間  $X$  とベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  に対して,  $f_t : X \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) をホモトピーとすると同型  $f_0^* \xi \cong f_1^* \xi$  が成り立つ.

**証明**  $f : X \times [0, 1] \rightarrow B$  をホモトピーとし,  $p_1 : X \times [0, 1] \rightarrow X$  を第一成分への射影とする. 各  $t \in [0, 1]$  に対して自然な同型写像  $f^* \xi|_{X \times t} \xrightarrow{\cong} p_1^* f_t^* \xi|_{X \times t}$  があるので, 補題 1.19 より各  $t \in [0, 1]$  のある開近傍で  $f_t^* \xi$  の同型類は一定である. よって,  $[0, 1]$  の連結性より同型  $f_0^* \xi \cong f_1^* \xi$  を得る. ■

**定義 1.21** パラコンパクト Hausdorff 空間  $B$  上のベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  と閉部分空間  $A \subset B$  に対して,  $\alpha : E|_A \xrightarrow{\cong} A \times \mathbb{F}^n$  を  $A$  上の自明化とする. このとき,  $A$  を一点に同一視して得られる空間  $B/A$  上のベクトル束  $\xi/\alpha$  を次で定める. 全空間  $E/\alpha$  を,  $e, e' \in E|_A$  に対して

$$e \sim e' \Leftrightarrow p_2(\alpha(e)) = p_2(\alpha(e'))$$

で生成された  $E$  上の同値関係による商空間とおく. ここで,  $p_2 : A \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  は第二成分への射影である. これがベクトル束となることは補題 1.19 から従う. また,  $\xi/\alpha$  の同型類が  $\alpha$  のホモトピーで不変であることがホモトピー不変性より従う.

**補題 1.22**  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$  とする. パラコンパクト Hausdorff 空間  $B$  の閉部分空間  $A \subset B$  が可縮ならば, 商写像  $B \rightarrow B/A$  は全単射  $\text{Vect}_{\mathbb{F}}(B/A) \xrightarrow{\cong} \text{Vect}_{\mathbb{F}}(B)$  を誘導する.

**証明** ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  を任意にとる.  $\xi|_A$  は自明束と同型なので, 自明化  $\alpha : E|_A \xrightarrow{\cong} A \times \mathbb{F}^n$  が存在する. ここで, 別の自明化  $\alpha' : E|_A \xrightarrow{\cong} A \times \mathbb{F}^n$  をとると,  $\alpha' \circ \alpha^{-1} : A \times \mathbb{F}^n \xrightarrow{\cong} A \times \mathbb{F}^n$  は,  $A$  が可縮であり  $GL(n, \mathbb{F})$  が連結であることから, 恒等写像とホモトピックである. よって,  $\alpha$  と  $\alpha'$  はホモトピックなので,  $\xi/\alpha$  が自明化に依存せず一意的に定まる. 以上より,  $\text{Vect}_{\mathbb{F}}(B/A) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}(B)$  の逆写像が構成できた. ■

**定義 1.23 (貼り合せ構成)** パラコンパクト Hausdorff 空間  $B$  の被覆  $\{B_1, B_2\}$  に対して,  $A := B_1 \cap B_2$  が  $B$  の閉集合であるとする. 二つのベクトル束  $\xi_i = (E_i, \pi_i, B_i)$  ( $i = 1, 2$ ) および同型写像  $\alpha : E_1|_A \xrightarrow{\cong} E_2|_A$  に対して,  $E := E_1 \cup_{\alpha} E_2$ ,  $\pi := \pi_1 \cup \pi_2 : E \rightarrow B$  とおけば, 補題 1.19 よりベクトル束  $\xi_1 \cup_{\alpha} \xi_2 := (E, \pi, B)$  が得られる. このベクトル束を  $\xi_1$  と  $\xi_2$  の  $\alpha$  による貼り合せ構成 (clutching construction) という.  $\xi_1 \cup_{\alpha} \xi_2$  の同型類が  $\alpha$  のホモトピーで不変であることがホモトピー不変性より従う.

**定理 1.24**  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$  とする. パラコンパクト Hausdorff 空間  $X$  に対して, 全単射

$$\text{Vect}_{\mathbb{F}}(S(X)) \cong \varinjlim_n [X, GL(n, \mathbb{F})]$$

が成り立つ. ここで, 右辺は連続写像のホモトピー類の帰納極限を表す.

**証明** 二枚の被覆  $\{C_0(X), C_1(X)\}$  はそれぞれ可縮なので, 貼り合せ構成は  $[X, GL(n, \mathbb{F})]$  で決定される. ■

**定義 1.25 (豊富)** ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  の切断全体  $\Gamma(\xi)$  の線型部分空間  $V \subset \Gamma(\xi)$  に対して, 対応  $B \times V \rightarrow E : (b, s) \mapsto s(b)$  が全射となるとき,  $V$  は豊富 (ample) であるという.

**例 1.26** 自明束  $\varepsilon^n = (B \times \mathbb{F}^n, p_1, B)$  の切断全体は  $\Gamma(\varepsilon^n) = C^0(B, \mathbb{F}^n)$  となるので,  $V := \mathbb{F}^n \subset C^0(B, \mathbb{F}^n)$  とおけばこれは豊富となる.

**補題 1.27** コンパクト Hausdorff 空間上のベクトル束の切断全体は必ず豊富な有限次元部分空間を持つ.

**証明** コンパクト Hausdorff 空間  $B$  上のベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  の自明化被覆  $\{U_i\}_{i=1}^N$  を考える. 各  $i = 1, \dots, N$  に対して, 自明束  $E|_{U_i}$  の切断全体が持つ豊富な部分空間を  $V_i$  とおく.  $\{\rho_i\}_{i=1}^N$  を開被覆  $\{U_i\}_{i=1}^N$  に従属する一の分割とすると,

$$\theta : V_1 \oplus \cdots \oplus V_N \rightarrow \Gamma(\xi) : \theta(v_1, \dots, v_N) := \sum_{i=1}^N \rho_i v_i$$

とおけば,  $V := \text{Im } \theta$  は豊富となる. ■

**系 1.28** コンパクト Hausdorff 空間上のベクトル束は自明束の直和因子となる.

**証明** コンパクト Hausdorff 空間  $B$  上のベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  の豊富な  $m$  次元部分空間を  $V$  とすると, 全射  $B \times V \rightarrow E$  の核  $\eta$  はベクトル束となり, さらに直和分解  $\xi \oplus \eta = \varepsilon^m$  が成り立つ. ■

なお, 本稿では直接用いることはないが次の重要な定理を紹介しておく.

**定理 1.29 (Serre-Swan)** コンパクト Hausdorff 空間  $B$  上のベクトル束と準同型写像がなす圏を  $\mathcal{C}$  とおき, 有限生成射影  $C^0(B)$  加群がなす圏を  $\mathcal{D}$  とおく. 系 1.28 より, 切断全体を対応させる函手

$$\Gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

が定まる. このとき, 函手  $\Gamma$  は圏同値となる.

**証明** まず, この函手が充満忠実であることを証明する. 準同型写像  $f : \Gamma(\xi) \rightarrow \Gamma(\eta)$  に対して, 準同型写像  $\varphi : \xi \rightarrow \eta$  を次のように定める.  $(b, v) \in \xi$  とする.  $b \in B$  まわりの自明化閉近傍を用いて  $v = (v_1, \dots, v_n)$  と成分表示する. この閉近傍上で一定値  $(v_1, \dots, v_n)$  をとる大域切断  $s$  を補題 1.18 により構成する. そこで,  $\varphi(b, v) := f(s)(b)$  とおく. この対応が自明化閉近傍および切断  $s$  の取り方に依存しないことを証明する. 別の切断  $s'$  であって  $b \in B$  のある近傍上で  $s = s'$  となるものとする. この近傍内に台を持ち, かつ  $\rho(b) = 1$  となるような連続関数  $\rho$  を考えると,  $f(s)(b) - f(s')(b) = f(s - s')(b) = f(\rho(s - s'))(b) = 0$  となる. よって  $f(s)(b) = f(s')(b)$  となる. これで, 充満忠実であることが証明された.

この函手が本質的全射であることを証明する.  $M$  を有限生成  $C^0(B)$  射影加群とすると, 準同型写像  $P : C^0(B)^n \rightarrow C^0(B)^n$  であって,  $\text{Im } P = M$  となるものが存在する. 対応

$$\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varepsilon^n, \varepsilon^n) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(C^0(B)^n, C^0(B)^n)$$

によって  $P$  と対応する準同型写像を  $\bar{P}$  とおくと, 命題 1.17 より  $\xi := \text{Im } \bar{P}$  はベクトル束であって,  $\Gamma(\xi) = M$  となる. これで, 本質的全射であることが証明された. ■

Serre-Swan の定理は代数的  $K$  理論の動機付けを与える ([20]).

## 2 Generalized Cohomology Theory

次に、一般コホモロジー論の初歩的事項について述べる。なお、本稿ではスペクトラムなどのホモトピー論に関わる事項については(重要な内容だが)深入りはしない。

### 2.1 Unreduced cohomology theory

**定義 2.1** (一般コホモロジー論) 関手  $h^* : (\mathcal{CW}^2)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  が次を満たすとき、 $h^*$  を一般コホモロジー論 (generalized cohomology theory) という。

(0) 任意の  $(X, A) \in \mathcal{CW}^2$  に対して、 $h^*(X, A) = \{h^n(X, A)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{Z}$ -次数付き可換群であって、 $f^* := h^*(f)$  は次数を保つ準同型写像である。

(1) (完全性) 自然変換  $\{\delta^n : h^n \circ \rho \rightarrow h^{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が存在して、任意の  $(X, A) \in \mathcal{CW}^2$  に対して、

$$\cdots \rightarrow h^n(X, A) \rightarrow h^n(X) \rightarrow h^n(A) \xrightarrow{\delta^n} h^{n+1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

が完全系列となる。

(2) (ホモトピー不変性) 二つの連続写像  $f_0, f_1 \in \mathcal{CW}^2$  がホモトピックならば、 $f_0^* = f_1^*$  が成り立つ。

(3) (切除性) 三系  $(X; A, B)$  に対して、包含写像  $(A, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, B)$  が同型写像  $h^*(A \cup B, B) \xrightarrow{\cong} h^*(A, A \cap B)$  を誘導する。この同型を切除同型 (excision isomorphism) という。

Eilenberg-Steenrod の公理系とは、さらに次の性質を追加したものである。

(4) (次元公理) 任意の  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$  に対して  $h^n(pt) = 0$  が成り立つ。

**例 2.2** (特異コホモロジー論) 特異コホモロジー  $H^*(-; R)$  は Eilenberg-Steenrod の公理系を満たす ([31]).

次の定理は基本的である ([29]).

**定理 2.3** (三つ組の完全系列) 三つ組  $(X, A, B)$  に対して、自然な完全系列

$$\cdots \rightarrow h^{n-1}(A, B) \rightarrow h^n(X, A) \rightarrow h^n(X, B) \rightarrow h^n(A, B) \rightarrow \cdots$$

が存在する。

**定理 2.4** (三系の完全系列) 三系  $(X; A, B)$  に対して、自然な完全系列

$$\cdots \rightarrow h^{n-1}(A, A \cap B) \rightarrow h^n(X, A \cup B) \rightarrow h^n(X, B) \rightarrow h^n(A, A \cap B) \rightarrow \cdots$$

が存在する。

**定理 2.5** (Mayer-Vietoris) 三系  $(X; A, B)$  に対して、自然な完全系列

$$\cdots \rightarrow h^{n-1}(A \cap B) \rightarrow h^n(A \cup B) \rightarrow h^n(A) \oplus h^n(B) \rightarrow h^n(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

が存在する。

## 2.2 Reduced cohomology theory

**定義 2.6 (簡約コホモロジー論)** 函手  $\tilde{h}^* : (\mathcal{CW}_0)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  が次を満たすとき,  $\tilde{h}^*$  を簡約コホモロジー論 (reduced generalized cohomology theory) という.

- (0) 任意の  $X \in \mathcal{CW}_0$  に対して,  $\tilde{h}^*(X) = \{\tilde{h}^n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{Z}$ -次数付き可換群であって,  $f^* := \tilde{h}^*(f)$  は次数を保つ準同型写像である.
- (1) (半完全性) 任意の基点付き CW 対  $(X, A)$  に対して,  $A \rightarrow X \rightarrow X/A$  は完全系列

$$\tilde{h}^*(X/A) \rightarrow \tilde{h}^*(X) \rightarrow \tilde{h}^*(A)$$

を誘導する.

- (2) (ホモトピー不変性) 二つの連続写像  $f_0, f_1 \in \mathcal{CW}_0$  がホモトピックならば,  $f_0^* = f_1^*$  が成り立つ.
- (3) (懸垂同型) 自然変換  $\{\sigma^n : \tilde{h}^n \rightarrow \tilde{h}^{n+1} \circ S\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が存在して, 任意の  $X \in \mathcal{CW}_0, n \in \mathbb{Z}$  に対して, 同型  $\sigma^n : \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}^{n+1}(S(X))$  が成り立つ. この同型を懸垂同型 (suspension isomorphism) という.

Eilenberg-Steenrod の公理系とは, さらに次の性質を追加したものである.

- (4) (次元公理) 任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して,  $\tilde{h}^n(pt) = 0$  が成り立つ.

**例 2.7 (特異コホモロジー論)** 特異コホモロジー  $\tilde{H}^*(-; R)$  は Eilenberg-Steenrod の公理系を満たす.

$(X, A)$  を基点付き CW 対とする. 包含写像  $A \rightarrow X$  の縮約写像錐  $CA \cup X$  に対して, 包含写像  $(X, A) \rightarrow (CA \cup X, CA)$  は同相写像  $(X/A, A/A) \rightarrow ((CA \cup X)/CA, CA/CA)$  を誘導する. この同相写像の逆写像と自然な射影  $(CA \cup X, CA) \rightarrow ((CA \cup X)/CA, CA/CA)$  との合成を  $q : CA \cup X \rightarrow X/A$  とおく. 次の補題は CW 対のコファイバー性から従う基本的な補題である ([30]).

**補題 2.8** 上において,  $q$  はホモトピー同値写像となる.

**定理 2.9 (完全性)**  $\tilde{h}^*$  を簡約コホモロジー論とする. 基点付き CW 対  $(X, A)$  に対して,  $k : CA \cup X \rightarrow (CA \cup X)/X = S(A)$  を自然な射影とする. 各  $n \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$\delta^n : \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\sigma^n} \tilde{h}^{n+1}(S(A)) \xrightarrow{k^*} \tilde{h}^{n+1}(CA \cup X) \xrightarrow{q^{*-1}} \tilde{h}^{n+1}(X/A)$$

とおくと, 次は自然な完全系列である.

$$\cdots \rightarrow \tilde{h}^n(X/A) \rightarrow \tilde{h}^n(X) \rightarrow \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \rightarrow \cdots$$

**証明**  $\tilde{h}^n(X)$  に関する完全性は半完全性から従う.  $\tilde{h}^n(X/A)$  に関する完全性は, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & CA \cup X \xrightarrow{k} (CA \cup X)/X = S(A) \\ \parallel & & \downarrow q \\ X & \longrightarrow & X/A \end{array}$$



から誘導される可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{h}^n(X) & \longleftarrow & \tilde{h}^n(CA \cup X) & \xleftarrow{k^*} & \tilde{h}^n(S(A)) \\
 \parallel & & \cong \uparrow q^* & & \cong \uparrow \sigma^{n-1} \\
 \tilde{h}^n(X) & \longleftarrow & \tilde{h}^n(X/A) & \xleftarrow{\delta^{n-1}} & \tilde{h}^{n-1}(A)
 \end{array}$$

における上列の完全性から従う。

$\tilde{h}^n(A)$  に関する完全性は、同相写像  $t : S(X) \rightarrow S(X)$  を  $t(x, s) := (x, 1 - s)$  ( $x \in X, s \in I/\partial I = S^1$ ) とおけば、ホモトピー可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 C_0A \cup X & \longrightarrow & C_0A \cup C_1X & \longrightarrow & (C_0A \cup C_1X)/(C_0A \cup X) = S(X) \\
 \parallel & & \downarrow q & & \downarrow t \\
 C_0A \cup X & \xrightarrow{k} & (C_0A \cup X)/X = S(A) = (C_0A \cup C_1X)/(C_1X) & \longrightarrow & S(X) \\
 \downarrow q & & & & \\
 X/A & & & & 
 \end{array}$$

から誘導される可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{h}^n(C_0A \cup X) & \longleftarrow & \tilde{h}^n(C_0A \cup C_1X) & \longleftarrow & \tilde{h}^n(S(X)) \\
 \parallel & & \uparrow q^* & & \uparrow t^* \\
 \tilde{h}^n(C_0A \cup X) & \xleftarrow{k^*} & \tilde{h}^n(S(A)) & \longleftarrow & \tilde{h}^n(S(X)) \\
 \uparrow q^* & & \uparrow \sigma^{n-1} & & \uparrow \sigma^{n-1} \\
 \tilde{h}^n(X/A) & \xleftarrow{\delta^{n-1}} & \tilde{h}^{n-1}(A) & \longleftarrow & \tilde{h}^{n-1}(X)
 \end{array}$$

における上列の完全性から従う。 ■

一般コホモロジー論と簡約コホモロジー論の関係について述べる。

**命題 2.10** 一般コホモロジー論  $h^* : (\mathcal{CW}^2)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  に対して、自然な同型  $h^* \circ i \circ \pi = h^*$  が成り立つ。

**証明**  $(X, A)$  を CW 対とする。連続写像  $i \circ \pi : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  によってコホモロジーの同型が誘導されることを証明すればよい。この写像  $i \circ \pi$  は

$$(X, A) \rightarrow (CA \cup X, CA) \xrightarrow{q} (X/A, A/A)$$

という連続写像の合成に分解できる。函手  $h^*$  を施すと、

$$h^*(X/A, A/A) \xrightarrow{q^*} h^*(CA \cup X, CA) \rightarrow h^*(X, A)$$

となる。 $q^*$  は同型写像であり、制限写像は切除同型である。よって、これが同型であることが証明された。 ■

**定理 2.11** 一般コホモロジー論  $h^*$  に対して、 $\tilde{h}^* := h^* \circ i$  は簡約コホモロジー論を定め、簡約コホモロジー論  $\tilde{h}^*$  に対して、 $h^* := \tilde{h}^* \circ \pi$  は一般コホモロジー論を定める。以上の対応により、両者は一対一に対応する。

**証明** 命題 2.10 と  $\pi \circ i = \text{id}$  より明らかである。 ■

### 3 $K$ -theory

いよいよ、本稿のテーマである位相空間の  $K$  理論について解説する。

#### 3.1 Topological $K$ -theory

**命題 3.1 (Grothendieck 群)** 可換半群<sup>\*2</sup>  $A$  に対して、次の普遍性を満たすような可換群  $K(A)$  が存在する。この  $K(A)$  を  $A$  の Grothendieck 群 (Grothendieck group, group completion) という：

- 半群準同型写像  $\alpha : A \rightarrow K(A)$  が存在して、任意の群  $G$  および半群準同型写像  $f : A \rightarrow G$  に対して、群準同型写像  $g : K(A) \rightarrow G$  が唯一つ存在して、 $f = g \circ \alpha$  を満たす。

特に、 $A$  が半環であるとき、 $A$  の積から誘導された積によって  $K(A)$  は環となる。上の対応によって、関手  $K : \text{Rig} \rightarrow \text{Ring}$  が定まった。

Grothendieck 群の構成方法は主に 2 通りある。普遍性より、どのように構成しても自然に同型となる。

**証明 (構成 1)** 可換半群  $(A, \oplus)$  の元で生成される自由可換群を  $F(A)$  とし、その部分群  $E(A)$  を  $E(A) := \{a + b - a \oplus b \mid a, b \in A\}$  とおく。  $K(A) := F(A)/E(A)$ ,  $\alpha$  を  $A \subset F(A) \rightarrow K(A)$  の合成とおけばよい。 ■

**証明 (構成 2)** 可換半群  $(A, \oplus)$  の直積  $A \times A$  上の同値関係を

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \text{ある } c \in A \text{ が存在して, } a \oplus b' \oplus c = a' \oplus b \oplus c$$

とおく。  $K(A) := (A \times A) / \sim$ ,  $\alpha : A \rightarrow K(A)$  を  $\alpha(a) := [(a, 0)]$  とおけばよい。 ■

**例 3.2** 自然数  $\mathbb{N}$  の Grothendieck 群は有理整数環  $\mathbb{Z}$  である。

**定義 3.3 ( $K_{\mathbb{F}}$  関手)** 関手  $\text{Vect}_{\mathbb{F}} : (\text{Top})^{\text{op}} \rightarrow \text{Rig}$  と  $K : \text{Rig} \rightarrow \text{Ring}$  の合成を  $K_{\mathbb{F}}$  とおく。

引き戻しのホモトピー不変性より、 $K_{\mathbb{F}}$  関手もホモトピー不変である。

**例 3.4** 一点のみからなる空間  $pt$  の  $K_{\mathbb{F}}$  群を求める。ベクトル束の rank を対応させる写像  $\text{Vect}_{\mathbb{F}}(pt) \rightarrow \mathbb{N}$  は半群同型写像なので、群同型写像  $K_{\mathbb{F}}(pt) = \mathbb{Z}$  を誘導する。

特異コホモロジー論と同様にして簡約  $K_{\mathbb{F}}$  群も定義される。

**定義 3.5 ( $\tilde{K}_{\mathbb{F}}$  関手)** 基点付き位相空間  $X$  に対して、基点の埋め込み  $i : x_0 \rightarrow X$  が誘導する準同型写像の核

$$\tilde{K}_{\mathbb{F}}(X) := \text{Ker}(i^* : K_{\mathbb{F}}(X) \rightarrow \mathbb{Z})$$

を考える。この対応によって、関手  $\tilde{K}_{\mathbb{F}} : (\text{Top}_0)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  が定まった。

<sup>\*2</sup> 可換群の公理から逆元の存在を外したものを満たす。

注意 3.6 完全系列

$$0 \rightarrow \tilde{K}_{\mathbb{F}}(X) \rightarrow K_{\mathbb{F}}(X) \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は定値写像  $c: X \rightarrow x_0$  によって  $c \circ i = \text{id}$  なので  $i^* \circ c^* = \text{id}$ , すなわち分裂する:

$$K_{\mathbb{F}}(X) = \tilde{K}_{\mathbb{F}}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

例 3.7 一点のみからなる空間  $pt$  の簡約  $K_{\mathbb{F}}$  群は自明である. すなわち,  $\tilde{K}_{\mathbb{F}}(pt) = 0$  となる.

例 3.8 位相空間  $X$  に対して,  $K$  関手の構成 2 より  $K_{\mathbb{F}}(X)$  の元は全て  $\eta - \nu$  ( $\eta, \nu \in \text{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ ) の形となる. さらに  $X$  がコンパクト Hausdorff であるとき, 系 1.28 よりベクトル束  $\nu'$  が存在して,  $\nu \oplus \nu' = \varepsilon^n$  となる. 故に,  $\eta - \nu = \eta - n + \nu' = (\eta \oplus \nu') - n$ , つまり,  $K_{\mathbb{F}}(X)$  の元は全て  $\xi - n$  ( $\xi \in \text{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ ) の形で表せる.

例 3.9 ベクトル束  $\xi, \eta$  に対して, ある  $n$  が存在して同型  $\xi \oplus \varepsilon^n = \eta \oplus \varepsilon^n$  が成り立つとき, そのベクトル束  $\xi$  と  $\eta$  は安定同値\*<sup>3</sup> (stably equivalent) であるという.

コンパクト Hausdorff 空間  $X$  上のベクトル束  $\xi, \eta$  に対して,  $K_{\mathbb{F}}(X)$  において  $\xi = \eta$  が成り立つとすると,  $K$  関手の構成 2 よりベクトル束  $\nu$  が存在して  $\xi \oplus \nu = \eta \oplus \nu$  が成り立つ. すると,  $\nu \oplus \nu' = \varepsilon^n$  となるベクトル束  $\nu'$  が存在するので,  $\xi \oplus \varepsilon^n = \eta \oplus \varepsilon^n$ , つまり安定同値となる. 以上より,  $K_{\mathbb{F}}(X)$  はベクトル束の安定同値類の集合とみなせる.

以上の考察を用いて次が証明される.

補題 3.10 基点付きコンパクト Hausdorff 空間対がなす圏上で  $\tilde{K}_{\mathbb{F}}$  は半完全性を持つ.

証明  $(X, A)$  を基点付きコンパクト Hausdorff 空間対とする. 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & X/A \\ \parallel & & & & \parallel \\ A & \longrightarrow & A/A & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

から誘導される可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}_{\mathbb{F}}(A) & \longleftarrow & \tilde{K}_{\mathbb{F}}(X) & \longleftarrow & \tilde{K}_{\mathbb{F}}(X/A) \\ \parallel & & & & \parallel \\ \tilde{K}_{\mathbb{F}}(A) & \longleftarrow & \tilde{K}_{\mathbb{F}}(A/A) = 0 & \longleftarrow & \tilde{K}_{\mathbb{F}}(X/A) \end{array}$$

より, 上列の合成は 0 である.

$x \in \tilde{K}_{\mathbb{F}}(X)$  を  $x|_A = 0$  となる元とすると, あるベクトル束  $\xi$  を用いて  $x = \xi - n$  と表せる.  $x$  の仮定より  $\xi|_A = n$  なので, ある  $m$  について  $(\xi \oplus \varepsilon^m)|_A = \varepsilon^{n+m}$  となる. この自明化を  $\alpha$  とおく.  $z := (\xi \oplus \varepsilon^m)/\alpha - n - m$  とおくと,  $p^*(z) = (\xi + m) - n - m = x$  となる. 以上より, 上列の完全性が証明された. ■

\*<sup>3</sup> Atiyah[4] の用語に従った. もっと一般に  $\xi \oplus \varepsilon^n = \eta \oplus \varepsilon^m$  となるときに, その二つを安定同値という文献もある ([32]).

例 3.11 位相空間  $X$  に対して,  $[X, GL(n, \mathbb{F})]$  は  $GL(n, \mathbb{F})$  から誘導される自然な群構造を持つ.  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$  とすると, 定理 1.24 の同型は半群同型であるので,  $K$  関手の普遍性より群準同型写像

$$K_{\mathbb{F}}(S(X)) \rightarrow \varinjlim_n [X, GL(n, \mathbb{F})]$$

が誘導される.  $X$  がコンパクトならば, 次の群同型を得る:

$$\tilde{K}_{\mathbb{F}}(S(X)) \cong [X, \varinjlim_n GL(n, \mathbb{F})].$$

特に, この例において  $X = S^0$  とすると,  $\tilde{K}_{\mathbb{F}}(S^1) = 0$  を得る.

位相空間の  $K$  理論におけるクロス積 (cross product) も定義される.

定義 3.12 (クロス積) 位相空間  $X, Y$  に対して, クロス積  $\mu: K_{\mathbb{F}}(X) \otimes K_{\mathbb{F}}(Y) \rightarrow K_{\mathbb{F}}(X \times Y)$  を

$$\mu(x \otimes y) := p_1^*(x)p_2^*(y)$$

によって定める.

## 3.2 Bott Periodicity

Bott による原論文 [11] によると, Bott 周期性定理は次を主張する.

定理 3.13 (Bott 周期性定理 1) 古典群の安定ホモトピー群に関して次が成り立つ.

$k \pmod{8}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_k(O)$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
$\pi_k(U)$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\pi_k(Sp)$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$

表 1 Bott 周期性定理

Bott は無限次元 Morse 理論を用いてこの奇妙な定理を証明した. その詳細を知りたい読者は, 例えば Milnor の教科書 [19] を参照のこと.

注意 3.14 「代数的トポロジー 信州春の学校 第 2 回 (2013 年度)」の講演中, 玉木先生が Bott 周期性定理に関する秀逸なエピソードを紹介していた\*4. Sullivan が Bott 周期性を頻繁に口ずさんでいたら, 6 歳と 4 歳になる二人の娘がキラキラ星のメロディに乗せて  $\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, 0, \mathbb{Z}$  と歌うようになったらしい.

本稿では主に  $K := K_{\mathbb{C}}$  の解説を行う. この定理を  $K$  群の言語に翻訳すると次の主張を得る.

定理 3.15 (Bott 周期性定理 2) コンパクト Hausdorff 空間  $X$  に対して, クロス積

$$\mu: K(X) \otimes K(S^2) \rightarrow K(X \times S^2)$$

は同型である.

\*4 [http://pantodon.shinshu-u.ac.jp/topology/literature/Bott\\_periodicity.html](http://pantodon.shinshu-u.ac.jp/topology/literature/Bott_periodicity.html) でも紹介されている.

後に Atiyah-Bott[9] によって定理 3.15 の別証明が発見された。その証明の方針はクロス積の逆写像を構成するというものであって、 $K$  群の言語のみを用いて述べられる。本稿ではこの証明を紹介する。定理の証明のために多少の準備を要する。なお、Bott 周期性定理は現在までに様々な証明が知られている\*5。

**定義 3.16 (貼り合せ関数)** ベクトル束  $\xi = (E, \pi, X)$ 、および  $\xi \times S^1 = (E \times S^1, \pi \times \text{id}, X \times S^1)$  の自己同型写像  $f \in \text{Aut}(\xi \times S^1)$  に対して、全空間が  $E \times D^2 \cup_f E \times D^2$  となるような  $X \times S^2$  上のベクトル束  $[\xi, f]$  が定まる。この  $f$  を  $[\xi, f]$  の貼り合せ関数 (clutching function) という。

定理 1.24 と同様にして、

$$\text{Vect}(X \times S^2) = \{[\xi, f] \mid \xi \in \text{Vect}(X), f \in \text{Aut}(\xi \times S^1)\}$$

が成り立つ。また、 $[\xi, f]$  の同型類は  $f$  のホモトピーに関して不変である。

**例 3.17** ベクトル束  $\xi = (E, \pi, X)$  に対して、 $p_1^* \xi = [\xi, 1]$  が成り立つ。

**例 3.18** 貼り合せ関数  $z^n : E \times S^1 \rightarrow E \times S^1$  を、対応  $(v, z) \mapsto (z^n v, z)$  によって定める。例えば、 $P(\mathbb{C}^2) = S^2$  上の普遍直線束  $\gamma^1(\mathbb{C}^2)$  を  $H$  とおくと、 $H = [\varepsilon^1, z^{-1}]$  が容易に確かめられる。

**定義 3.19 (Laurent 多項式)** 準同型写像  $a_i \in \text{End}(\xi)$  ( $-N \leq i \leq N$ ) を用いて

$$l = \sum_{i=-N}^N a_i z^i : E \times S^1 \rightarrow E \times S^1$$

と表されるような貼り合せ関数  $l$  を Laurent 多項式 (Laurent polynomial) という。

以降、ベクトル束の底空間は常にコンパクトとする。

**命題 3.20 (Fourier 展開)** 任意の貼り合せ関数はある Laurent 多項式とホモトピックである。

**証明** 準同型写像  $f \in \text{End}(\xi \times S^1)$  に対して、Fourier 係数  $a_n$ 、部分和  $S_n$ 、Cesaro 平均  $f_n$  を、それぞれ

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} f(-, z) z^{-n} dz, \quad S_n := \sum_{i=-n}^n a_i z^i, \quad f_n := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i$$

と定める\*6。  $\xi$  に Hermite 計量の一つ固定して、 $\text{End}(\xi \times S^1)$  上に作用素ノルムを導入すると、 $\text{Aut}(\xi \times S^1)$  は開集合となる。  $f$  を同型写像とすると、Fejér の定理より十分大きい  $n$  に対して  $f_n$  が自己同型写像となるようにできる。この  $f_n$  と貼り合せ関数  $f$  を線分で結べば欲しかったホモトピーを得る。 ■

**命題 3.21** 次数が高々  $n$  の多項式  $q = q(z)$  に対して、ある一次式  $L^n(q)$  が存在して、 $[\xi, q] \oplus [n\xi, 1] = [(n+1)\xi, L^n(q)]$  が成り立つ。

\*5 mathoverflow の質問 (<http://mathoverflow.net/questions/8800/proofs-of-bott-periodicity>) が参考になる。

\*6 古典的な Fourier 級数論では、 $\xi = (\mathbb{C}, \pi, pt)$  の場合を扱っていた。

証明 この命題は  $n$  階常微分方程式の解法を参考にすると証明の方針が立てやすい.

多項式  $q$  を  $q(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$  とおき,  $1 \oplus q: (n+1)E \rightarrow (n+1)E$  を次のように基本変形する:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & q(z) & \\ & & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -z & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -z \\ a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

この基本変形は  $GL(n+1, \mathbb{C})$  内の道で結べる, ホモトピックな変形である. 右の行列が定める線型写像を  $L^n(q)$  とおけばよい. ■

命題 3.22 多項式  $q(z)$  に対して,  $\deg q \leq n$  とすると次が成り立つ.

- (1)  $[(n+2)\xi, L^{n+1}(q)] = [(n+1)\xi, L^n(q)] \oplus [\xi, 1].$
- (2)  $[(n+2)\xi, L^{n+1}(zq)] = [(n+1)\xi, L^n(q)] \oplus [\xi, z].$

証明 それぞれ次のような基本変形を考えればよい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -z & & & \\ & 1 & -z & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -z \\ 0 & a_n & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & -z & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -z \\ 0 & a_n & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -z & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -z \\ & & & & 1 & -z \\ a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -z & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -z \\ & & & & 0 & z \\ a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 3.23 一次式  $a(x)z + b(x)$  について, 直和分解  $[\xi, a(x)z + b(x)] = [\xi_+, 1] \oplus [\xi_-, z]$  が存在する.

この直和分解の要点は定数項  $b(x)$  に関する固有値分解である. まずは次の補題を証明する.

補題 3.24 複素ベクトル束  $\xi = (E, \pi, B)$  の自己準同型  $f: E \rightarrow E$  に対して, 単純閉曲線  $C \subset \mathbb{C}$  が存在して,  $f$  の各ファイバー上における固有値が  $C$  上に無いとする. このとき, 次を満たすような直和分解  $E = E_+ \oplus E_-$  が存在する.

- (1)  $f$  は直和分解を保つ:  $f(E_{\pm}) = E_{\pm}.$
- (2)  $f|_{E_+}$  の固有値は  $C$  の外側に,  $f|_{E_-}$  の固有値は  $C$  の内側に含まれる.

証明 複素数  $z$  が  $C$  に属するとき,  $z \cdot \text{id} - f$  は逆写像を持つ. そこで, 自己準同型  $Q: E \rightarrow E$  を

$$Q := \frac{1}{2\pi i} \int_C (z \cdot \text{id} - f)^{-1} dz$$

と定めると、留数定理より  $Q$  は  $C$  の内部に含まれるような固有値に関する固有空間への射影となる。よって、命題 1.17 より  $E_+ := \text{Ker } Q$ ,  $E_- := \text{Im } Q$  はベクトル束となる。これが条件を満たすことは明らかである。 ■

**証明 (命題 3.23)** まずは  $a(x) = 1$  のとき主張を示す。  $z + b(x)$  が同型であることから、自己準同型  $b(x)$  は単位円周  $S^1$  上に固有値を持たない。よって、補題 3.24 より

$$[\xi, z + b(x)] = [\xi_+, z + b_+(x)] \oplus [\xi_-, z + b_-(x)]$$

が成り立つ。  $0 \leq t \leq 1$ ,  $z \in S^1$  に対して、  $b_+(x)$  は  $-tz$  を固有値に持たない。つまり、ホモトピー  $-tz + b_+(x)$  は  $0 \leq t \leq 1$  に対して自己同型写像である。よって、  $[\xi_+, z + b_+(x)] = [\xi_+, b_+(x)]$  となる。  $b_+|_{\xi_+} = 1$  より、結局  $[\xi_+, z + b_+(x)] = [\xi_+, 1]$  を得る。同様にして、ホモトピー  $z + tb_-(x)$  を用いることで  $[\xi_-, z + b_-(x)] = [\xi_-, z]$  を得る。以上より、  $a(x) = 1$  のとき主張が証明された。

一般の  $a(x)$  に対しては次のようにして  $a(x) = 1$  の場合に帰着される。  $z \in S^1$ ,  $0 \leq t < 1$  に対して、  $w(z, t) := (z + t)/(1 + tz)$  とおくと、  $w \in S^1$  となる。そこで、ホモトピー  $(a(x) + tb(x))z + ta(x) + b(x) = (1 + tz)(a(x)w(z, t) + b(x))$  は  $0 \leq t < 1$  に対して自己同型写像となる。一方、  $a(x) + b(x)$  は  $z = 1$  のときの  $a(x)z + b(x)$  に等しいので自己同型である。よって、  $0 \leq t_0 < 1$  を 1 に十分近くとると  $f := a(x) + t_0b(x)$  は自己同型となる。

$$(a(x) + t_0b(x))z + t_0a(x) + b(x) = f(z + (f^{-1}(t_0a(x) + b(x))))$$

なので、  $g := z + (f^{-1}(t_0a(x) + b(x)))$  とおけば  $[\xi, a(x)z + b(x)] = [\xi, fg] = [\xi, g]$  より、  $a(x) = 1$  の場合に帰着される。以上より、一般の  $a(x)$  に対しても主張が証明された。 ■

これで、いよいよ Bott 周期性定理が証明できる。

**証明 (定理 3.15)** 貼り合せ構成  $[\xi, f]$  に対して、

$$\begin{aligned} [\xi, f] &= [\xi, l] \quad (l \text{ は } f \text{ とホモトピックな Laurent 多項式。}) \\ &= [\xi, q] \otimes p_2^* H^n \quad (q = z^n l \text{ は多項式。}) \\ &= \{[\{(n+1)\xi\}_+, L^n(q)] - [n\xi, 1]\} \otimes p_2^* H^n \\ &= \{[\{(n+1)\xi\}_+, 1] + [((n+1)\xi)_-, z] - p_1^*(n\xi)\} \otimes p_2^* H^n \\ &= p_1^*\{(n+1)\xi\}_+ \otimes p_2^* H^n + p_1^*\{(n+1)\xi\}_- \otimes p_2^* H^{n-1} - p_1^*(n\xi) \otimes p_2^* H^n \\ &= \mu(\{(n+1)\xi\}_+ \otimes H^n + \{(n+1)\xi\}_- \otimes H^{n-1} - n\xi \otimes H^n) \\ &= \mu(\{(n+1)\xi\}_- \otimes (H^{n-1} - H^n) + \xi \otimes H^n) \quad (\{(n+1)\xi\}_+ \oplus \{(n+1)\xi\}_- = (n+1)\xi \text{ を用いた。}) \end{aligned}$$

より、  $\mu : K(X) \otimes K(S^2) \rightarrow K(X \times S^2)$  は全射である。特に、  $K(S^2)$  は  $1, H$  で生成されることがわかる。

クロス積  $\mu$  の逆写像  $\nu : K(X \times S^2) \rightarrow K(X) \otimes K(S^2)$  を次のようにして構成する。貼り合せ構成  $[\xi, f]$  に対して、  $f$  は十分大きな  $n$  による Cesaro 平均  $f_n$  とホモトピックである。  $q_n := z^n f_n$  は  $\deg q \leq 2n$  の多項式である。先ほどの計算と同様に、

$$\begin{aligned} [\xi, f] &= [\xi, f_n] \\ &= [\xi, q_n] \otimes p_2^* H^n \\ &= \mu(\{(2n+1)\xi\}_- \otimes (H^{n-1} - H^n) + \xi \otimes H^n) \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで,  $\nu_n([\xi, f]) := \{(2n+1)\xi\}_- \otimes (H^{n-1} - H^n) + \xi \otimes H^n$  とおくと,

$$\begin{aligned}\nu_{n+1}([\xi, f]) &= \{(2n+3)\xi\}_- \otimes (H^n - H^{n+1}) + \xi \otimes H^{n+1} \\ &= (\{(2n+1)\xi\}_- + \xi) \otimes (H^n - H^{n+1}) + \xi \otimes H^{n+1} \\ &= (\{(2n+1)\xi\}_-) \otimes (H^n - H^{n+1}) + \xi \otimes H^n \\ &= (\{(2n+1)\xi\}_-) \otimes (H^{n-1} - H^n) + \xi \otimes H^n \quad (H^2 \otimes \varepsilon^1 = H \oplus H \text{ を用いた。}) \\ &= \nu_n([\xi, f])\end{aligned}$$

より,  $\nu := \nu_n$  は  $n$  に依存しない。この  $\nu$  は明らかに半群準同型写像なので,  $K$  群からの群準同型写像  $\nu$  を誘導する。  $\mu \circ \nu = \text{id}$  は定義より明らかである。

$\nu \circ \mu = \text{id}$  を確かめるには,  $K(S^2)$  の元  $H^n$  ( $n \geq 0$ ) に関してのみ証明すればよい。

$$\begin{aligned}\nu \circ \mu(\xi \otimes H^n) &= \nu([\xi, z^{-n}]) \\ &= 0 \otimes (H^{n-1} - H^n) + \xi \otimes H^n \\ &= \xi \otimes H^n.\end{aligned}$$

以上より,  $\nu$  が  $\mu$  の逆写像であることが証明された。 ■

コンパクト Hausdorff 空間対  $(X, A)$  に対して, 定理 2.9 の証明と同様にして完全系列

$$\cdots \rightarrow \tilde{K}(S(A)) \rightarrow \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(A)$$

を得る。特に空間対として  $(X \times Y, X \vee Y)$  をとることで

$$\cdots \rightarrow \tilde{K}(S(X) \vee S(Y)) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y) \rightarrow \tilde{K}(X \times Y) \rightarrow \tilde{K}(X \vee Y)$$

となり, 空間対として  $(X \vee Y, X)$  をとることで

$$\cdots \rightarrow \tilde{K}(S(X)) \rightarrow \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \vee Y) \rightarrow \tilde{K}(X)$$

を得る。包含写像  $i: X \rightarrow X \vee Y$  について,  $p_1 \circ i = \text{id}$  より短完全系列

$$0 \rightarrow \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \vee Y) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow 0$$

は分裂する:  $\tilde{K}(X \vee Y) = \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$ 。よって,  $\tilde{K}(X \times Y) = \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \oplus \tilde{K}(X \wedge Y)$  が成り立つ。クロス積  $\mu: K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y)$  の定義より,  $\mu(\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)) \subset \tilde{K}(X \times Y)$  となる。

**定義 3.25 (簡約クロス積)** クロス積  $\mu: K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y)$  が誘導する

$$\tilde{\mu}: \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$$

を簡約クロス積 (reduced cross product) という。

簡約クロス積の定義より直ちに次が従う。

**補題 3.26** クロス積  $\mu$  が同型であることの必要十分条件は簡約クロス積  $\tilde{\mu}$  が同型であることである。

故に, 簡約  $K$  群を用いて Bott 周期性定理を述べ直すと次のようになる。



**定理 3.27 (Bott 周期性定理 3)** コンパクト Hausdorff 空間上で自然な同型  $\tilde{K} \circ S^2 \cong \tilde{K}$  が成り立つ.

以上を踏まえて,  $K$  理論が一般コホモロジー論となることを確かめる.

**定義 3.28 ( $K$  コホモロジー)**  $\mathbb{Z}$ -次数付き可換群を対応させる関手  $\tilde{K}^* : (\mathcal{F}_0)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  を,  $n$  が偶数のとき  $\tilde{K}^n := \tilde{K}$ ,  $n$  が奇数のとき  $\tilde{K}^n := \tilde{K} \circ S$  と定義する.  $\tilde{K}^*$  を  $K$  コホモロジー ( $K$  cohomology) という.

**定理 3.29**  $K$  コホモロジーは  $\mathcal{F}_0$  上の簡約コホモロジー論となる.

**証明** 半完全性, ホモトピー不変性は既に述べた. 懸垂同型は定理 3.27 より従う. ■

また,  $K$  コホモロジー論は基点付きコンパクト Hausdorff 空間のなす圏上でも一般コホモロジー論となり, さらにこの場合でも完全性が成り立つ. その証明は, 補題 2.8 の代わりに補題 1.22 を用いればよい.

**注意 3.30**  $K_{\mathbb{C}}$  コホモロジーの周期は 2 である一方,  $K_{\mathbb{R}}$  コホモロジー,  $K_{\mathbb{H}}$  コホモロジーの周期は 8 となる (Bott 周期性定理 1 における表を参照のこと).

**例 3.31** 球面の簡約  $K$  群は  $\tilde{K}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$ ,  $\tilde{K}(S^{2n+1}) = 0$  となる.

### 3.3 History

$K$  理論の歴史を概観する. Atiyah の解説 [8] によると,  $K$  理論が初めて登場したのは, 1957 年の Bonn で開かれた Arbeitstagung という研究集会のようである. その動機づけには, Hirzebruch による Riemann-Roch の定理の一般化が背景にあったようだ.

**定理 (Hirzebruch-Riemann-Roch)** 複素射影代数多様体  $X$  とその上の正則ベクトル束  $E$  に対して,

$$\chi(X, E) = T(X, E)$$

が成り立つ. ここで,  $n$  を複素多様体  $X$  の複素次元とすると, 左辺はベクトル束  $E$  の切断全体がなす層を係数としたコホモロジー群の Euler 数

$$\chi(X, E) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(X, E)$$

であり, 右辺はベクトル束  $E$  の Chern 類を用いて定義される Todd 種数である.

この研究集会において, Grothendieck は Euler 数  $\chi(X, E)$  と Todd 種数  $T(X, E)$  がベクトル束  $E$  に関して加法性を持つことを指摘すると同時に,  $K$  群の概念を導入した. つまり, 両者の不変量は可換群  $K(X)$  上に自然な拡張を持つ. Grothendieck はさらに Hirzebruch の定理を一般化した公式を証明し, 定理の見通しを良くした. 下の主張において  $Y$  として一点をとれば, Hirzebruch-Riemann-Roch の定理が得られる ([13]).

**定理 (Grothendieck-Riemann-Roch)** 代数多様体間の正則固有射  $f : X \rightarrow Y$  と接続層  $\mathcal{F}$  に対して,

$$\text{ch}(f_* \mathcal{F}) \text{td}(Y) = f_*(\text{ch}(\mathcal{F}) \text{td}(X))$$

が成り立つ. ここで, Chern 標数  $\text{ch}$  は接続層がなす  $K$  群から有理整数を係数とする Chow 群への自然変換として定義されている. また, 接束の Todd 種数を  $\text{td}$  によって表す.

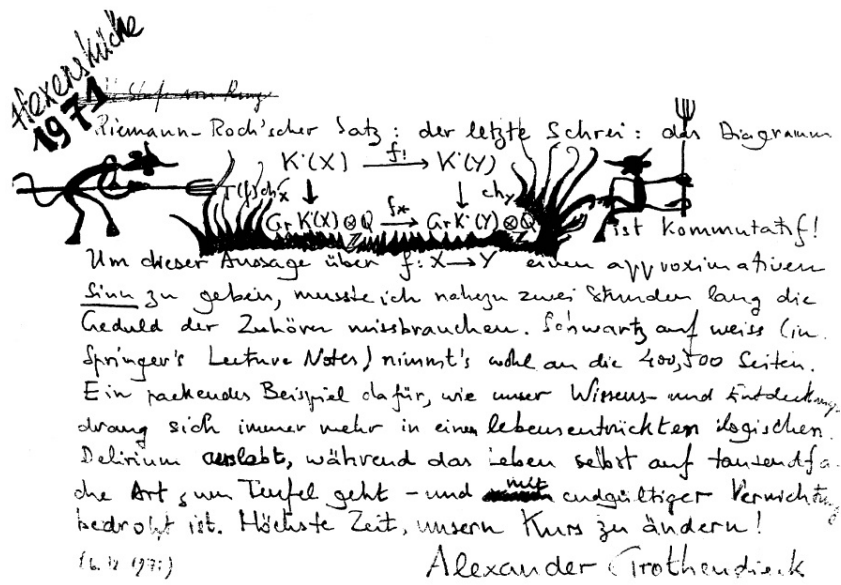


図1 Grothendieck-Riemann-Roch の定理

一方で、当時の代数的位相幾何学において、Hopf 不変量が 1 となる次元の決定問題という、多くの数学者が関わった大きな問題があった。本稿でも後ほど詳しく述べるが、この問題は可除代数の構造が入るユークリッド空間の次元や、平行化可能な球面の次元の特定にも関わる。

球面の平行化可能性問題に取り組んでいた James から Bott 周期性定理について聞いていた Atiyah は、Bott 周期性を基礎にして Grothendieck の  $K$  理論を位相幾何学的に定式化すれば、この問題への有効な手段が得られると考えた ([7])。これが位相空間の  $K$  理論の始まりである。1959 年には、特性類や等質空間のコホモロジー群の計算、さらには Hirzebruch 符号数定理のような整数性定理の新たな発見にも期待できると考え、Atiyah は Hirzebruch と共同で位相空間の  $K$  理論の研究を始めた ([5, 6])。

$K$  理論の発展とは別に、1960 年には Adams [1] によって Hopf 不変量が 1 となる次元の決定問題に完全な解答が得られた。しかし、この Adams による証明は「特異コホモロジー論における二次コホモロジー作用素」を用いた、非常に難解な証明であったと云われている。この論文を読んだ Atiyah は、「 $K$  理論におけるコホモロジー作用素」を用いることで Adams の証明を大幅に簡略化できる\*7と考え、自身のアイデアを Adams に伝えた。このやり取りが二人の共著論文 [2] となり、この作用素は Adams 作用素と呼ばれるようになる。

その後も、 $K$  理論は分野の壁を越えて様々な影響を与えた。位相空間の  $K$  理論のみならず、代数的  $K$  理論、 $C^*$  環の  $K$  理論などといった一般化も発展した。また、Atiyah-Singer の指数定理は  $K$  理論の枠組みで証明することができる ([18])。最近では、弦理論やトポロジカル絶縁体などといった、物理学の分野に対しても  $K$  理論が応用されているようである ([12, 28])。これら全ての詳細を語りつくすことは、残念ながら筆者の力量では到底及ばない。

\*7 Atiyah [7] がこの証明を 'post-card proof' と表現している。

## 4 Applications

最後に,  $K$  理論の簡単な応用を述べる.

**定理 4.1 (Brouwer の不動点定理)** 単位円盤から自身への連続写像  $f : D^n \rightarrow D^n$  は必ず不動点を持つ.

**証明** 連続写像  $f : D^n \rightarrow D^n$  が不動点を持たないと仮定する. すなわち, 任意の  $x \in D^n$  に対して  $f(x) \neq x$  である.  $f(x)$  から  $x$  へ向かう半直線と境界  $S^{n-1}$  との交点を  $g(x)$  とおくと, 二次方程式の解の公式より  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  は連続写像であり, さらに定義より  $g|_{S^{n-1}} = \text{id}$  を満たす.

$$\text{id} : S^{n-1} \rightarrow D^n \xrightarrow{g} S^{n-1}$$

という連続写像の合成に簡約  $K^*$  函手を施すと,

$$\text{id} : \tilde{K}^*(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{K}^*(D^n) \rightarrow \tilde{K}^*(S^{n-1})$$

となるが, これは  $\tilde{K}^*(S^{n-1}) \neq 0$  および  $\tilde{K}^*(D^n) = 0$  に矛盾する. ■

**定理 4.2 (球面上の概複素構造)**  $S^n$  が概複素構造を持つための必要十分条件は  $n = 2$  もしくは  $n = 6$  である.

**証明** 十分条件であることは良く知られている. 必要条件であることを証明する.

概複素構造が存在したとき実多様体の次元は偶数である.  $S^{2m}$  に概複素構造が入ったとすると Chern 類が定義される. Chern 類と Pontrjagin 類の関係式

$$1 - p_1 + p_2 - \dots \pm p_m = (1 - c_1 + c_2 - \dots \pm c_m)(1 + c_1 + c_2 + \dots + c_m)$$

において,  $p_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), Euler 類  $c_m = 2$  より,  $m$  が偶数ならば矛盾する. さらに, Chern 標数

$$ch(E) = \sum_{k=0}^m \frac{s_k(E)}{k!}$$

は環準同型写像  $ch : K(S^{2m}) \rightarrow H^*(S^{2m}; \mathbb{Z})$  を定めるので,  $c_m = 2$  より  $2/(m-1)! \in \mathbb{Z}$  となる. よって,  $m = 1, 2, 3$ , つまり  $n = 2, 4, 6$  を得る. 以上より,  $n = 2, 6$  となる. ■

**定理 4.3 (Hopf invariant one problem)**  $n \geq 2$  とする. 以下の命題は全て同値である.

- (1)  $n = 2, 4, 8$ .
- (2)  $\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}$  上有限次元ノルム多元体の構造を持つ.
- (3)  $\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}$  上有限次元多元体の構造を持つ.
- (4)  $S^{n-1}$  は通常の可微分構造に関して平行化可能である.
- (5)  $S^{n-1}$  はある可微分構造に関して平行化可能である.
- (6)  $S^{n-1}$  は  $H$  空間の構造を持つ.
- (7) Hopf 不変量が 1 となる連続写像  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  が存在する.

注意 4.4 歴史的な注意をしておく.

- (2)  $\Rightarrow$  (1) : 1898 年, Hurwitz [15] により純代数的に証明された.
- (7)  $\Rightarrow n = 2, 4r$  : 1950 年, Whitehead [27] により Whitehead 積を用いて証明された.
- (7)  $\Rightarrow n = 2^m$  : 1952 年, Adem [3] により Steenrod 代数の生成元を求めることで証明された\*<sup>8</sup>.
- (7)  $\Rightarrow n \neq 16$  : 1955 年, Toda [25] により Toda bracket [26] を用いて証明された.
- (4)  $\Rightarrow$  (1) : 1958 年, Bott-Milnor [10] と Kervaire [17] により Bott 周期性定理を用いて証明された.
- (7)  $\Rightarrow$  (1) : 1960 年, Adams [1] により Adem の考察をさらに深めることで証明された.

定理の証明を述べる前に, 主張に含まれている用語などを確認しておく.

定義 4.5 (ノルム多元体) 実ベクトル空間  $V$  上にノルム  $\|\cdot\|$  が与えられているとする. また, 実双線型写像  $m : V \times V \rightarrow V$  が次を満たすとする.

- (1) (単位元) ある  $1 \in V$  が存在して, 任意の  $x \in V$  に対して  $m(1, x) = m(x, 1) = x$  が成り立つ.
- (2) (ノルム) 任意の  $x, y \in V$  に対して,  $\|m(x, y)\| = \|x\|\|y\|$  が成り立つ.

このとき, 組  $(V, \|\cdot\|, m)$  を  $\mathbb{R}$  上のノルム多元体 (normed algebra) という.

例 4.6 ノルム多元体の具体例を挙げる.

- (1)  $V := \mathbb{R}$  は Euclid ノルムと実数体  $\mathbb{R}$  の積に関してノルム多元体となる.
- (2)  $V := \mathbb{R}^2$  は Euclid ノルムと複素数体  $\mathbb{C}$  の積に関してノルム多元体となる.
- (3)  $V := \mathbb{R}^4$  は Euclid ノルムと四元数体  $\mathbb{H}$  の積に関してノルム多元体となる.
- (4)  $V := \mathbb{R}^8$  は Euclid ノルムと八元数環  $\mathbb{O}$  の積に関してノルム多元体となる.

定義 4.7 (多元体) 実ベクトル空間  $V$  および実双線型写像  $m : V \times V \rightarrow V$  に対して, 積  $m$  が零因子を持たないとき, 組  $(V, m)$  を多元体, もしくは可除代数\*<sup>9</sup> (division algebra) という.

補題 4.8 ノルム多元体は多元体である.

証明  $(V, \|\cdot\|, m)$  をノルム多元体とする.  $x, y \in V$  が  $m(x, y) = 0$  を満たすとき,  $\|x\|\|y\| = \|m(x, y)\| = 0$ , 故に  $\|x\| = 0$  もしくは  $\|y\| = 0$ , つまり  $x = 0$  もしくは  $y = 0$  を得る. よって,  $(V, m)$  は多元体である. ■

次に, 多様体の平行化可能性 (parallelizability) という性質について述べる.

定義 4.9 (平行化可能) 可微分多様体  $M$  の接束  $\tau_M$  が自明束となるとき,  $M$  は平行化可能であるという.

補題 4.10 以下の命題は全て同値である.

- (1)  $\mathbb{R}^n$  は多元体の構造を持つ.
- (2) 実射影空間  $\mathbb{R}P^{n-1}$  は通常の可微分構造に関して平行化可能である.
- (3) 球面  $S^{n-1}$  は通常の可微分構造に関して平行化可能である.

\*<sup>8</sup> この論文で既に二次コホモロジー作用素の概念が考えられている

\*<sup>9</sup> 積に関して斜体となる, という強い仮定にするのが通常である ([32]).

証明 (1) ならば (2) を示す.  $m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を零因子を持たない双線型写像とし,  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$  を標準基底とする. 各  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $m(-, e_i): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は線型同型である. そこで, 線型同型  $v_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を任意の  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して  $v_i(m(x, e_i)) = (m(x, e_i))$  を満たすように定めると,  $v_1 = \text{id}$  であり, かつ  $x \neq 0$  ならば  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  は線型独立である. 各  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}} = \text{Hom}(\gamma^1(\mathbb{R}^n), (\gamma^1(\mathbb{R}^n))^\perp)$  の切断  $w_i$  を, 各  $L \in \mathbb{R}P^{n-1}$  に対して  $v_i|_L: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p_2: \mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp \rightarrow L^\perp$  の合成とおく.  $w_2, \dots, w_n$  は  $\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}}$  の自明化となる. また, (2) ならば (3) は被覆写像  $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  を用いれば容易に示される.

(3) ならば (1) を示す.  $v_1, \dots, v_{n-1}$  を  $\tau_{S^{n-1}}$  の自明化とする. 各  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して,  $n$  次正方形行列  $A(x)$  を,  $x = 0$  ならば  $A(0) := 0$ ,  $x \neq 0$  ならば  $A(x) := (x, v_1(x/\|x\|), \dots, v_{n-1}(x/\|x\|))$  とおくと,  $m(x, y) := A(x)y$  は零因子を持たない双線型写像となる. ■

与えられた多様体が平行化可能であるかを決定するために, その多様体の特性類を活用するのは自然な発想であろう. 実際, Stiefel-Whitney 類の応用として次を得る ([21]).

**定理 4.11 (Stiefel)**  $\mathbb{R}P^{n-1}$  が平行化可能ならば  $n = 2^m$  である.

次に, 代数的位相幾何学で重要な概念である  $H$  空間について述べる. これは位相群の一般化にあたる.

**定義 4.12 ( $H$  空間)** 基点付き位相空間  $X$  と連続写像  $\mu: X \times X \rightarrow X$  が次のホモトピー可換図式を満たすとき, 組  $(X, \mu)$  を  $H$  空間という. ここで,  $e \in X$  は  $X$  の基点,  $i_R(x) := (e, x)$ ,  $i_L(x) := (x, e)$  とする.

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{id} \nearrow & \uparrow \mu & \nwarrow \text{id} & \\ X & \xrightarrow{i_L} & X \times X & \xleftarrow{i_R} & X \end{array}$$

**補題 4.13** 球面  $S^{n-1}$  がある微分構造に関して平行化可能であれば  $H$  空間の構造を持つ.

証明  $\Sigma$  を平行化可能な  $(n-1)$  次元ホモトピー球面とする. 対角線集合  $\Delta \subset \Sigma \times \Sigma$  の法束  $\nu$  は接束  $\tau_\Sigma$  と同型なので, 自明化が存在する.  $\Sigma \times \Sigma \rightarrow T(\nu)$  を  $\nu$  の Pontrjagin-Thom 構成とする. 自明化により  $T(\nu) \rightarrow S^{n-1}$  が誘導されるので, この合成を  $\mu: \Sigma \times \Sigma \rightarrow S^{n-1}$  とする. 適切な同相  $\Sigma \cong S^{n-1}$  により,  $\mu': S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  であって,  $\mu'|_{*\times S^{n-1}}, \mu'|_{S^{n-1} \times *}$  の写像度が 1 となるようにできる. よって,  $(S^{n-1}, \mu')$  は  $H$  空間となる. ■

**注意 4.14** Adams [1] によると, この補題を最初に証明したのは A. Dold のようである. しかし, この事実に対して Adams は文献を挙げていない.

最後に, 今回の主役である Hopf 不変量について述べる.

**定義 4.15 (Hopf 不変量)**  $n \geq 2$  とする. 連続写像  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  に対して, Puppe 完全系列

$$\dots \rightarrow \tilde{H}^{q-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}^q(C_f; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}^q(S^n; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}^q(S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

より, 自然な同型  $H^n(C_f; \mathbb{Z}) \cong H^n(S^n; \mathbb{Z})$ ,  $H^{2n}(C_f; \mathbb{Z}) \cong H^{2n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$  および  $H^q(C_f; \mathbb{Z}) = 0$  ( $q \neq 0, n, 2n$ ) を得る. 球面の標準的な向きに関する生成元をこの同型で写したものを  $x \in H^n(C_f; \mathbb{Z})$ ,  $y \in H^{2n}(C_f; \mathbb{Z})$  とおく. 連続写像  $f$  の Hopf 不変量 (Hopf invariant)  $h(f) \in \mathbb{Z}$  を,  $x^2 = h(f)y$  によって定める.

**注意 4.16** 歴史的な注意をしておく. 1900 年代前半には Brouwer によって連続写像  $S^n \rightarrow S^n$  のホモトピー類が写像度 (mapping degree) によって分類されることが知られていた. また, 次元の関係より  $n < m$  ならば連続写像  $S^n \rightarrow S^m$  のホモトピー類は自明であり, 被覆ホモトピー性質より  $n \geq 2$  のとき連続写像  $S^n \rightarrow S^1$  のホモトピー類も自明である. すると, 次は素朴な疑問として連続写像  $S^3 \rightarrow S^2$  のホモトピー類がどのように分類されるのか関心がわく.

Hopf 不変量はもともと 1931 年に Hopf [14] が  $n = 2$  の場合に定義した. そのアイデアは, 滑らかな写像 (もしくは単体的写像)  $f : S^3 \rightarrow S^2$  の異なる二点の逆像による絡み数 (linking number) を  $f$  の Hopf 不変量とするものであった. Hopf ファイブレーションに対して Hopf 不変量を計算すると 0 でないので, 連続写像  $S^3 \rightarrow S^2$  のホモトピー類が無数個存在するということになる. よって, ホモトピー群  $\pi_3(S^2) \neq 0$  が成り立つ. これはホモロジー群  $H_3(S^2; \mathbb{Z}) = 0$  という事実と対照的であって非常に興味深い. これら Hopf による研究を皮切りに, 数学の一分野としてホモトピー群に関する研究が本格的に始まった.

その後も, Hopf 自身によって同様のアイデアで一般の連続写像  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  に対する Hopf 不変量も定義された. なお, 本稿における写像錐を用いる定義は Steenrod [23] によるものである. その他にも, Serre [22] による定義や Whitehead [27] による一般化などがある.

**注意 4.17** 写像錐  $C_f$  のコホモロジー環は,  $R$  を任意の可換環とすると,

$$H^*(C_f; R) = R[x, y]/(x^2 - h(f)y, xy, y^2)$$

となる. ただし,  $\deg x = n, \deg y = 2n$  である.

**例 4.18** 上において  $n$  が奇数のとき,  $x^2 = -x^2$  より連続写像  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  の Hopf 不変量は 0 である.

**例 4.19** Hopf 不変量が 1 となる連続写像の具体例を挙げる.  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  に対して射影化  $\mathbb{F}^2 - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{F}^2)$  を単位球面に制限させることで, 連続写像  $S^3 \rightarrow S^2, S^7 \rightarrow S^4, S^{15} \rightarrow S^8$  が得られる. これらの Hopf 不変量は 1 であり, 特に  $H^*(P(\mathbb{F}^2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^3), \deg x = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$  となる.

**補題 4.20 (Hopf 構成)**  $S^{n-1}$  が  $H$  空間の構造をもつならば, Hopf 不変量が 1 となる連続写像  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  が存在する.

**証明** 連続写像  $f : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  が  $\deg(f|_{* \times S^{n-1}}) = \alpha, \deg(f|_{S^{n-1} \times *}) = \beta$  を満たすとき, Hopf 不変量が  $\alpha\beta$  となるような連続写像  $\hat{f} : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  を構成すればよい.

$S^{2n-1} = \partial(D^n \times D^n) = (D^n \times S^{n-1}) \cup (S^{n-1} \times D^n)$  を用いて,  $\hat{f}(D^n \times S^{n-1}) \subset D^n_+, \hat{f}(S^{n-1} \times D^n) \subset D^n_-$  となるような連続写像  $\hat{f} : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  が構成される. 後は  $h(\hat{f}) = \alpha\beta$  となることを示せばよい. ■

$K$  コホモロジーを用いても同様に Hopf 不変量が定義される :

**定義 4.21 (Hopf 不変量)**  $n = 2m, m \geq 1$  とする. 連続写像  $f : S^{4m-1} \rightarrow S^{2m}$  に対して, Puppe 完全系列

$$\dots \rightarrow \tilde{K}^{q-1}(S^{4m-1}) \rightarrow \tilde{K}^q(C_f) \rightarrow \tilde{K}^q(S^{2m}) \rightarrow \tilde{K}^q(S^{4m-1}) \rightarrow \dots$$

より, 次の短完全列を得る.

$$0 \rightarrow \tilde{K}^{-1}(S^{4m-1}) \rightarrow \tilde{K}^0(C_f) \rightarrow \tilde{K}^0(S^{2m}) \rightarrow 0$$

$\tilde{K}(S^{2k})$  の生成元として  $(H-1)^k$  がとれる.  $(H-1)^{2m} \in \tilde{K}^{-1}(S^{4m-1})$  をこの短完全列で写した元を  $y \in \tilde{K}(C_f)$ ,  $(H-1)^m \in \tilde{K}(S^{2m})$  に写るような元を  $x \in \tilde{K}(C_f)$  とおく.  $(H-1)^2 = 0$  が  $\tilde{K}(S^2)$  において成り立つので,  $x^2 = 0$  となる. よって, 完全性から  $x^2$  は  $y$  の整数倍で表せる. そこで, 連続写像  $f$  の Hopf 不変量 (Hopf invariant)  $h'(f) \in \mathbb{Z}$  を,  $x^2 = h'(f)y$  によって定める. この  $h'(f) \in \mathbb{Z}$  は  $x$  の取り方に依存しない.

環準同型写像である Chern 標数を用いることで次が従う ([16]).

**命題 4.22** 特異コホモロジーによる Hopf 不変量  $h$  と  $K$  コホモロジーによる Hopf 不変量  $h'$  は一致する.

次の二つの命題は基本的である ([16]).

**命題 4.23** Hopf 不変量はホモトピー不変である.

**命題 4.24** Hopf 不変量  $h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  は準同型写像となる.

よって, Hopf 不変量が 1 となる連続写像が存在すれば, 準同型写像  $h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  が全射となり,  $\pi_{2n-1}(S^n)$  が  $\mathbb{Z}$  を直和因子に持つことがわかる. つまり, Hopf 不変量は球面のホモトピー群を求めるための重要な手掛かりとなる.

ところで, 特異コホモロジーにおけるコホモロジー作用素の重要な例として Steenrod 平方作用素 ([24, 31]) がある. これは胞体複体における胞体の接着写像を特定するのに有用である.

**定理 4.25 (Steenrod 平方作用素)** 各  $i \geq 0$  に対して, 次数を  $i$  上げる自然変換  $Sq^i : H^*(-; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(-; \mathbb{Z}/2)$  であって次を満たすものが存在する. これを Steenrod 平方作用素という.

- (1)  $Sq^0 = \text{id}$ .
- (2)  $i > \deg x$  ならば  $Sq^i(x) = 0$ .
- (3)  $\deg x = n$  ならば  $Sq^n(x) = x^2$ .
- (4) (Cartan の公式)  $Sq^k(xy) = \sum_{i=0}^k Sq^i(x)Sq^{k-i}(y)$ .

Adem [3] による証明を紹介しよう.

**定理 4.26 (Adem)**  $H^*(X; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x]/(x^3)$  となる位相空間  $X$  に対して,  $\deg x = 2^m$  が成り立つ.

**証明** Adem は Steenrod 平方作用素の全体がなす代数  $\mathfrak{a}(2)$  の生成元として  $\{Sq^{2^m}\}_{m \geq 0}$  がとれることを証明した. なお, この証明は Steenrod の教科書 [24] でも紹介されている. 以下ではこの事実を用いる.  $0 \neq x^2 = Sq^n(x) = \sum (Sq^{2^m} \text{ の積})(x)$  より, ある  $m$  が存在して  $Sq^{2^m}(x) \neq 0$  となる.  $H^q(X; \mathbb{Z}/2)$  は  $q \neq 0, n, 2n$  ならば 0 なので,  $0 < 2^m \leq \deg x = n$  より  $n = 2^m$  を得る. ■

Adams [1] は Adem の考えを深く追究した:

**定理 4.27 (Adams)**  $H^*(X; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x]/(x^3)$  となる位相空間  $X$  に対して,  $\deg x = 1, 2, 4, 8$  となる.

$K$  コホモロジーにおけるコホモロジー作用素も重要である. その具体例として Adams 作用素 ([4]) がある.

**定理 4.28 (Adams 作用素)** 各  $i \geq 0$  に対して、環の圏における自然変換  $\psi^i : K \rightarrow K$  であって次を満たすものが存在する。これを Adams 作用素という。

- (1) 直線束  $L$  に対して、 $\psi^i(L) = L^k$ .
- (2) 各  $i, j$  に対して、 $\psi^i \circ \psi^j = \psi^{ij}$ .
- (3)  $\psi^p(x) = x^p \pmod{p}$ .

さて、ここまで保留していた定理の証明を述べて、いよいよ本稿を締めくくろう。

**証明 (Hopf invariant one problem)** 以上の補題より、あとは (7) ならば (1) を証明すればよい。

$f : S^{4m-1} \rightarrow S^{2m}$  を Hopf 不変量が 1 となる連続写像とする。  $x, y \in \tilde{K}(C_f)$  を Hopf 不変量の定義にあるような元とすると、 $x^2 = y$  である。 Adams 作用素の性質より、 $\psi^k(y) = k^{2m}y$ 、 $\psi^k(x) = k^m x + \mu_k y$  ( $\mu_k \in \mathbb{Z}$ ) が成り立つ。

$$\psi^k \circ \psi^l(x) = \psi^k(l^m x + \mu_l y) = k^m l^m x + (k^{2m} \mu_l + l^m \mu_k) y$$

と  $\psi^k \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^k$  より、

$$(k^{2m} - k^m) \mu_l = (l^{2m} - l^m) \mu_k$$

を得る。  $k = 2, l = 3$  とすると、 $\psi^2(x) = x^2 \pmod{2}$  より、 $\mu_2$  が奇数は奇数である。 よって、 $2^m$  が  $3^m - 1$  を割り切る必要があるが、そのような自然数  $m$  は  $m = 1, 2, 4$  のみである。

以上より、連続写像  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  の Hopf 不変量が 1 となるならば、 $n = 2, 4, 8$  である。 ■

## 参考文献

- [1] J. F. Adams. On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 72, pp. 20–104, 1960.
- [2] J. F. Adams and M. F. Atiyah.  $K$ -theory and the Hopf invariant. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, Vol. 17, pp. 31–38, 1966.
- [3] José Adem. The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, Vol. 38, pp. 720–726, 1952.
- [4] M. F. Atiyah. *K-theory*. Lecture notes by D. W. Anderson. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [5] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch. Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 65, pp. 276–281, 1959.
- [6] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. III, pp. 7–38. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [7] Michael Atiyah. *Collected works. Vol. 2*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1988.  $K$ -theory.
- [8] Michael Atiyah.  $K$ -theory past and present. In *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, pp. 411–417. Berliner Math. Gesellschaft, Berlin, 2001.
- [9] Michael Atiyah and Raoul Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles. *Acta Math.*, Vol. 112, pp. 229–247, 1964.



- [10] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 64, pp. 87–89, 1958.
- [11] Raoul Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 43, pp. 933–935, 1957.
- [12] Daniel S. Freed and Gregory W. Moore. Twisted equivariant matter. *Ann. Henri Poincaré*, Vol. 14, No. 8, pp. 1927–2023, 2013.
- [13] Friedrich Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Translated from the German and Appendix One by R. L. E. Schwarzenberger, With a preface to the third English edition by the author and Schwarzenberger, Appendix Two by A. Borel, Reprint of the 1978 edition.
- [14] Heinz Hopf. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.*, Vol. 104, No. 1, pp. 637–665, 1931.
- [15] A. Hurwitz. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Math. Ann.*, Vol. 88, No. 1-2, pp. 1–25, 1922.
- [16] Dale Husemoller. *Fibre bundles*, Vol. 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1994.
- [17] Michel A. Kervaire. Non-parallelizability of the  $n$ -sphere for  $n > 7$ . *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 44, No. 3, pp. 280–283, 1958.
- [18] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*, Vol. 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [19] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [20] John Milnor. *Introduction to algebraic K-theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971. Annals of Mathematics Studies, No. 72.
- [21] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [22] Jean-Pierre Serre. Groupes d’homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 58, pp. 258–294, 1953.
- [23] N. E. Steenrod. Cohomology invariants of mappings. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 50, pp. 954–988, 1949.
- [24] N. E. Steenrod. *Cohomology operations*. Lectures by N. E. Steenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [25] Hirosi Toda. Le produit de Whitehead et l’invariant de Hopf. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 241, pp. 849–850, 1955.
- [26] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies, No. 49. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [27] George W. Whitehead. A generalization of the Hopf invariant. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 51, pp. 192–237, 1950.
- [28] Edward Witten. D-branes and  $K$ -theory. *J. High Energy Phys.*, No. 12, pp. Paper 19, 41 pp. (electronic), 1998.

- [29] 荒木捷朗. 一般コホモロジー. 紀伊國屋数学叢書 4. 紀伊國屋書店, 1975.
- [30] 西田吾郎. ホモトピー論. 共立講座 現代の数学 16. 共立出版, 1985.
- [31] 中岡稔. 位相幾何学 ホモロジー論. 共立講座 現代の数学 15. 共立出版, 1970.
- [32] 日本数学会編. 岩波数学辞典 第4版. 岩波書店, 2007.

なお, 本文中で用いた図は <http://math.stanford.edu/~vakil/11-245/> から引用した.