Notes on the h-Cobordism Theorem

@snaka0213

最終更新：2014 年 9 月

概要

1961 年, S. Smale 氏は Morse 理論を深く考察することで 5 次元以上の場合の Poincaré 予想を証明し, 翌年の 1962 年にはさらに改良して「h 同境定理」を証明した. S. Smale 氏はこの業績により 1966 年の Fields 賞を獲得している. 本稿ではこの「h 同境定理」の証明を紹介し, 最後にその応用として 5 次元以上の場合の Poincaré 予想を証明する. なぜ 5 次元以上でなければならないのか, その高次元の特殊事情を味わってもらえれば本望である. なお, 本稿は紙面の都合上証明の詳細を省略している箇所が複数ある.

0 Introduction

微分トポロジーが扱う対象は可微分多様体である. 0, 1, 2 次元の閉多様体は 1800 年代までにはもう既に分類されていた. では, 3 次元閉多様体の場合はどうか. 1904 年, フランスの数学者 H. Poincaré が『Analysis situs』という論文の最後の補遺で, 次の問題を提案した. これが有名な **Poincaré 予想**である.

Poincaré 予想：単連結な 3 次元閉多様体は球面と同相である.

「3 次元」という条件のみを単に一般の「n 次元」とした場合, 高次元には反例が山ほどある. 高次元で同様の問題を考えるにはホモロジー群に関する条件を加えなければならない. なお, このホモロジー群に関する条件は 3 次元閉多様体の場合は単連結性から自動的に従うことに注意しておこう.

一般 Poincaré 予想：単連結でホモロジー群が球面と等しい n 次元閉多様体は球面と同相である.

最初に Poincaré 予想が肯定的に解決されたのはなんと 5 次元以上の場合であった. 1961 年の S. Smale 氏の仕事である. 同氏は翌年の 1962 年にそれをさらに改良して h 同境定理を証明しており, この定理は今や微分トポロジーの基本的な定理となっている.

本稿はその h 同境定理の証明, および 5 次元以上の場合の Poincaré 予想を含めたその応用を紹介するのを最終目標とする.

なお, 本稿と直接の関係はないが, その後の同予想に関する動向を補足しておこう. 1981 年には Michael H. Freedman によって 4 次元の場合の Poincaré 予想が肯定的に解かれた. そして, 初めに Poincaré 本人が提出した元来の Poincaré 予想は 2003 年に証明された. G. Perelman の仕事である. こうして, Poincaré 予想の 100 年にわたる歴史はひとまず幕を閉じたことになる.

1　Basic Definitions

本稿を通して, ホモロジー群とコホモロジー群はどれも整数係数であるとし, 単連結には連結であって空でないことを仮定する. また, 多様体といえば全て C^∞ 多様体であってパラコンパクト性を満たすものとする.

定義 1.1 (同境) $(W; V, V')$ が多様体の**三つ組** (triad) もしくは**同境** (cobordism) であるとは, 次を満たすことと定義する.

(1) W はコンパクトな多様体であって, V と V' は互いに交わらない W の閉部分多様体である.
(2) $\partial W = V \cup V'$ が成り立つ.

また, 二つの三つ組 $(W; V_0, V_1)$, $(W'; V_0', V_1')$ において, 微分同相写像 $g : W \to W'$ であって, $g(V_i) = V_i'$ $(i = 0, 1)$ となるものが存在したとき, 二つの三つ組は微分同相であるという.

例 1.2 (積同境) 閉多様体 V に対して, $(V \times [0,1]; V \times 0, V \times 1)$ は三つ組である. これを**積同境** (product cobordism) という.

例 1.3 三つ組 $(W; V, V')$ の境界 V, V' は空であってもよい. よって, 例えば境界付きコンパクト多様体 W に対して $(W; \emptyset, \partial W)$ は三つ組である. また, 閉多様体はそれ自身 $\emptyset$ と $\emptyset$ をつなぐ同境でもある.

例 1.4 (合成) 二つの三つ組 $c = (W; V_0, V_1)$, $c' = (W'; V_1', V_2')$ と微分同相 $h : V_1 \to V_1'$ が与えられているとき, h によって W と W' を接合したものを $W \cup_h W'$ と表す. このとき, $cc' := (W \cup_h W'; V_0, V_2')$ は三つ組となる. この cc' を h による**境界貼り合せ** (pasting together the boundaries) もしくは**合成**という. 合成には結合則が成り立ち, 積同境はこの合成の単位元にあたる.

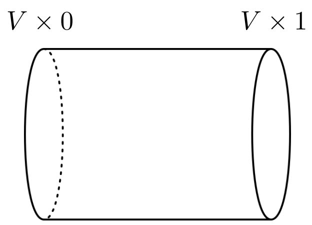

図 1　積同境 (product cobordism)

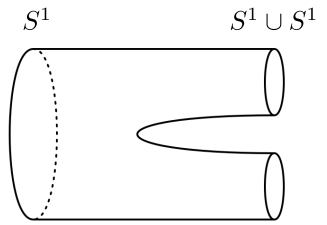

図 2　同境の例 (pants)

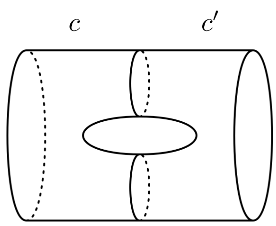

図 3　合成

この合成には逆元が存在する場合があることに注意しよう.

同境が定義できたところで, 今回の目標である **h 同境定理**の主張が説明できる.

定理　(h 同境定理) 三つ組 $(W; V, V')$ が次を満たすとする.

(1) W, V, V' はどれも単連結である.
(2) $H_*(W, V) = 0$.
(3) $\dim W \geq 6$.

このとき, W は積同境 $V \times [0,1]$ と微分同相である. 特に, V と V' は微分同相である.

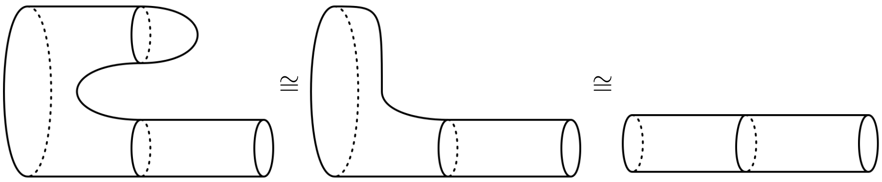

図 4　この合成は積同境と微分同相である．

注意 1.5 定理の仮定 (2) は, (1) の仮定のもとでは V と V' が W の変位レトラクトであることと同値である．このとき, $(W; V, V')$ は h 同境であるという．h 同境の“h”はホモトピー (homotopy) の頭文字である．

多様体上のベクトル場を“ねじる”際に重要なのが次の**アイソトピー**の概念である．アイソトピーの定義域に積同境が現れていることに注意しておく．

定義 1.6 (アイソトピー) 多様体の滑らかな埋め込み $f_0, f_1 : M \to N$ において, f_0 と f_1 がアイソトピック (isotopic) であるとは, 次を満たす滑らかな写像 $F : M \times [0,1] \to N$ が存在することと定義する．また, この F をアイソトピー (isotopy) という．

(1) $F(-,0) = f_0$, $F(-,1) = f_1$ を満たす．
(2) 各 $0 \leq t \leq 1$ に対して, $F(-,t) : M \to N$ は滑らかな埋め込みである．

我々はこれから同境というものを徹底的に調べたい．難しくて複雑なものを調べるときは, 易しくて簡単なものへの議論に帰着させようと考えるのが常套手段である．

例えば複素係数の多項式を調べたいとき, まずは因数分解を行うだろう．そのままだと難解な多項式を, 一次式という非常に扱いやすい対象の組み合わせに帰着させる, という考え方だ．一次式への分解が常に可能であることを保証する定理が代数学の基本定理であった．

このように, 同境を多項式のように“因数分解”するのが次節の目標である．後程詳しく解説するが, 大雑把に説明すると因数にあたるのが初等的同境であって, その因数分解を保証してくれるのが Morse 関数の存在である．ただし, この因数には逆元が含まれている可能性があることに注意しておく．

2　Morse Theory

定義 2.1 (Morse 関数) 三つ組 $(W; V, V')$ および W 上の C^∞ 関数 $f : W \to [a,b]$ において, f が $(W; V, V')$ 上の **Morse 関数** (Morse function) であるとは, 次を満たすことと定義する．

(1) $f^{-1}(a) = V$, $f^{-1}(b) = V'$ を満たす．
(2) f の臨界点はどれも非退化であり, かつ全て $\operatorname{Int} W$ に属する．

ここで f の臨界点が非退化であるとは, その Hesse 行列

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

がその臨界点において正則行列であることと定義する．

次の二つはどちらもよく知られた事実である．

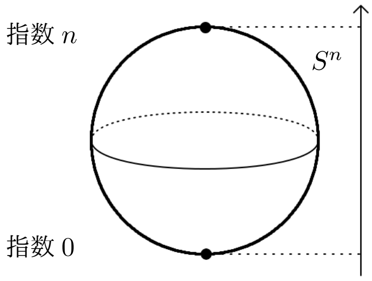

図 5　S^n の高さ関数

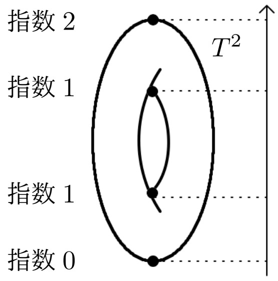

図 6　T^2 の高さ関数

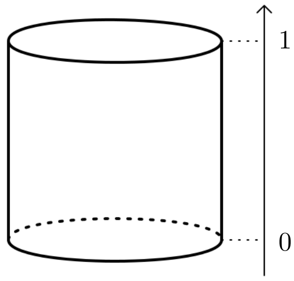

図 7　積同境 $V \times [0,1]$ の射影

事実 2.2 (Morse の補題) 三つ組 $(W; V, V')$ 上の Morse 関数 f が与えられたとする．このとき, 各臨界点まわりの座標近傍 $(x_1, \ldots, x_n)$ であって, f の局所座標表示が

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.} - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

となるものが存在する．ここで λ とは Hesse 行列の固有値における負の数の個数である．この λ をその臨界点の**指数** (index) という．特に W のコンパクト性から, Morse 関数の臨界点は必ず有限個となる．

事実 2.3 任意の三つ組に対して Morse 関数が存在する．もっと強く, C^2 位相を入れた関数空間の中で稠密な開集合をなす．つまり, Morse 関数は非常にたくさん存在する．

次の**勾配状ベクトル場** (gradient-like vector field) が多様体の形状を調べる際に非常に重要な役割を果たす．

補題 2.4 (勾配状ベクトル場の存在) 三つ組 $(W; V, V')$ 上の Morse 関数 f に対して, 次を満たすベクトル場 X が存在する．この X を f の勾配状ベクトル場 (gradient-like vector field) という．

(1) f の臨界点を除いた集合上で $X(f) > 0$ を満たす．
(2) 各臨界点に座標近傍 $(x_1, \ldots, x_n)$ が存在して, X の局所座標表示が $X = (-x_1, \ldots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \ldots, x_n)$ となるものがある．ここで, λ とはその臨界点の指数である．

証明　Morse の補題から臨界点周りで条件を満たす座標近傍とその上のベクトル場が存在する．臨界点の補集合では, 陰関数定理より関数の値が局所座標関数の射影となるような座標近傍, およびその上のベクトル場であって (1) を満たすものが存在する．あとはそれらを 1 の分割を用いて適切に貼り合せれば勾配状ベクトル場が容易に構成される． ■

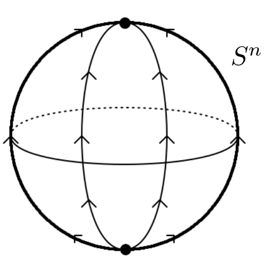

図 8　高さ関数の勾配状ベクトル場

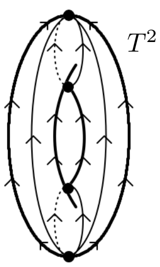

図 9　高さ関数の勾配状ベクトル場

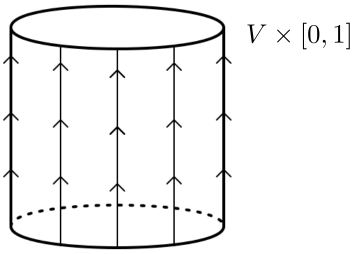

図 10　射影の勾配状ベクトル場

臨界点の個数が極端に少ないと多様体の形状が完全に決まってしまう現象を紹介しよう．

定理 2.5 三つ組 $(W; V, V')$ 上の Morse 関数であって, 臨界点をもたないものが存在したとき, $(W; V, V')$ は積同境と微分同相となる．特に, V と V' は微分同相である．

証明 定理の仮定にある Morse 関数の勾配状ベクトル場をとり, その積分曲線を考える．勾配状ベクトル場の性質からそれは V から V' まで留まることなく流れ続ける．時間を調節して時刻 $t = 0$ に V から出発した積分曲線が時刻 $t = 1$ には V' に到着するようにする．これで $V \times [0, 1]$ との微分同相が構成された． ■

定理 2.5 が h 同境定理を証明する際のカギとなる．h 同境定理の証明の戦略は大雑把に説明すると次の通りである．まず, 同境の上の Morse 関数をとり, 定理の仮定を用いて Morse 関数を徐々に変形していく．そして最終的にすべての臨界点を消去することができれば, 定理 2.5 から積同境と微分同相になり, 証明が終わる．

定理 2.6 (Reeb の球面定理) n 次元閉多様体上に臨界点が二つのみの Morse 関数が存在したとき, その多様体は n 次元球面 S^n と同相である．

証明 定理の仮定にある Morse 関数には最大値, 最小値が存在する．Morse の補題より最大点と最小点の指数はそれぞれ n と 0 であるので, 各々 n 次元円盤と微分同相な近傍が取れる．その二つの近傍を取り除くと, それは臨界点を持たない Morse 関数を持つ．よって, 定理 2.5 よりそれは円筒 $S^{n-1} \times [0, 1]$ と微分同相である．つまり, この閉多様体は二つの n 次元円盤を境界の微分同相で貼り合せたもの (これをねじった球面 (twisted sphere) という) と微分同相である．以上より, この閉多様体が球面と同相であることが証明された． ■

注意 2.7 Reeb の球面定理にある「同相である」という主張を「微分同相である」という主張に変えると成り立たない．1956 年に Milnor によって, 7 次元球面と同相であるが微分同相ではない多様体, いわゆるエキゾチック球面 (exotic sphere) の存在が証明されたが, その「同相である」という主張を証明する際に Reeb の球面定理が用いられたようである．

以上の定理から, Morse 関数の臨界点の個数が少ないほど状況が非常に簡単になることが実感できたのではないだろうか．これを踏まえて次の**初等的同境** (elementary cobordism) を定義しよう．

定義 2.8 (初等的同境) 三つ組 $(W; V, V')$ 上に臨界点がただ一つしかないような Morse 関数が存在したとき, $(W; V, V')$ を 初等的同境 (elementary cobordism) という．

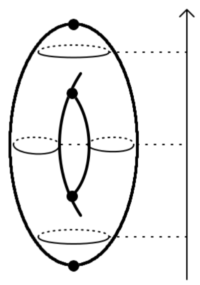

図 11　初等的同境への分解

例 2.9 図 11 のように, トーラスを高さ関数の臨界値に挟まれるところの等位面で“輪切り”にしていけば, これで初等的同境への分解となる.

補題 2.10 任意の三つ組には, 異なる臨界点に対しては値も異なるような Morse 関数[*1]が存在する. よって, これを用いて任意の同境は初等的同境の有限個の合成に分解することができる.

証明 Morse 関数を一つとる. ずらしたい臨界点まわりで隆起関数をとり, それによって関数の値を局所的に少しずらせばよい. ■

3 Elementary Cobordisms

この節を通して $(W; V, V')$ は初等的同境であるとし, f をその上の Morse 関数, p を f の唯一の臨界点とし, その指数を λ とおく. また, f の勾配状ベクトル場 X を一つとり, その積分曲線を c_t とおこう. 実は, 初等的同境は境界 V (もしくは V') と臨界点の指数 λ からほとんどの情報が決まってしまう.

定義 3.1 臨界点 p の**左向き球面** (left-hand sphere) $S_L(p)$, **右向き球面** (right-hand sphere) $S_R(p)$ を次で定義する. また, 各々と p との間にある円盤を**左向き円盤** (left-hand disk) $D_L(p)$, **右向き円盤** (right-hand disk) $D_R(p)$ とおく.

$$S_L(p) = \{x \in V \mid c_{+\infty}(x) = p\},$$
$$S_R(p) = \{x \in V' \mid c_{-\infty}(x) = p\}.$$

各球面の次元が $\dim S_L(p) = \lambda - 1$, $\dim S_R(p) = n - \lambda - 1$ であることに注意しておく.

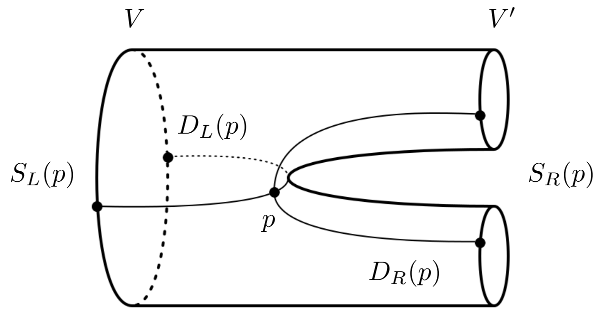

図 12 左向き球面 (left-hand sphere) と右向き球面 (right-hand sphere)

定理 3.2 上の状況において, $V \cup D_L(p)$ と $V' \cup D_R(p)$ はどちらも W の変位レトラクトである.

証明 積分曲線によって V' の方から徐々に潰していけば主張の前半にある変位レトラクトを得る. また, Morse 関数 f を (-1) 倍して考える (同境をまさに“ひっくり返す”) ことで後半が従う. ■

[*1] これも C^2 位相の中で稠密な開集合をなす.

系 3.3 上の状況において, 次のホモロジー群の同型が従う.

$$H_i(W,V) \cong H_{n-i}(W,V') \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=\lambda), \\ 0 & (i \neq \lambda). \end{cases}$$

証明 先ほど構成した変位レトラクトと切除定理を用いればよい. 生成元はそれぞれ基本類 $[D_L(p)]$ と $[D_R(p)]$ である. ■

4 Rearrangement of Cobordisms

初等的同境に分解した後, それらを指数順に並び替えることを考えよう. まずは, 臨界点を "通る" 積分曲線が交わっていないときに, 臨界値を自由に上下できる現象を紹介しよう.

定理 4.1 (Pre-Rearrangement Theorem) 三つ組 $(W;V_0,V_1)$ において, 臨界点が p, p' の二つしかない Morse 関数 $f: W \to [0,1]$ があったとする. また, X を f の勾配状ベクトル場とする. 臨界点 p に対して, X の積分曲線 c_t を用いて, W 内のコンパクト集合 K_p を次で定義する.

$$K_p := \{x \in W \mid c_{+\infty}(x) = p \text{ または } c_{-\infty}(x) = p\}.$$

以上の設定のもと, $K_p \cap K_{p'} = \emptyset$ が成り立つとしよう. このとき, 任意の $a, a' \in (0,1)$ に対して, 次を満たす Morse 関数 $g: W \to [0,1]$ が存在する.

(1) X は g の勾配状ベクトル場である.
(2) 臨界点は p, p' のみであって, さらに $g(p)=a$, $g(p')=a'$ を満たす.
(3) ∂W のある近傍で $g=f$ を満たし, かつ p, p' のある近傍上では $g = f + \text{const.}$ である.

なお, この定理の主張は複数の臨界点の集合 $p = \{p_1, \ldots, p_l\}$, $p' = \{p'_1, \ldots, p'_{l'}\}$ に変えても成立する.

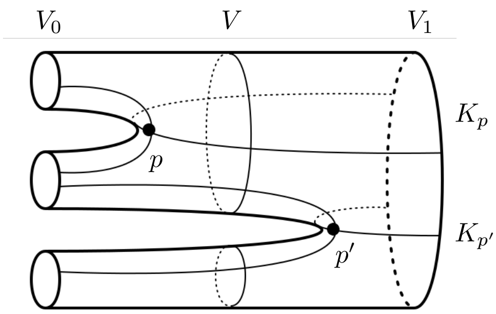

図 13 臨界値の上げ下げ

証明 仮定から, K_p と $K_{p'}$ を分離するような関数がとれるので, それを用いて p と p' を別個に上下させることができる, というのが証明の概要である. 証明の詳細は [1] を参照せよ. ■

この定理を踏まえて, 次は勾配状ベクトル場を局所的に "ねじる" ことで, K_p と $K_{p'}$ を交わらせないようにして, 最終的に臨界値を指数順に並べ替えることを考えよう. 以降, $f(p) < 1/2 < f(p')$ であって, p と p' の指数を λ, λ' とおき, $\lambda \geq \lambda'$ を満たしているとしよう. また, $V := f^{-1}(1/2)$ とおこう.

着目するのは前節でも重要な概念であった右向き球面 $S_R(p)$ と左向き球面 $S_L(p')$ の挙動である．これが積分曲線の全体における様子を中間地点 V で測る役割を持っている．まず, 指数に関する条件から, 次のような次元の関係式が従う．

$$\dim S_R(p) + \dim S_L(p') < \dim V.$$

つまり, 等位面 V の中で $S_R(p)$ と $S_L(p')$ には余次元に余裕があることがわかった．ここで次の補題を証明しておこう．

補題 4.2 多様体 V の部分多様体 M, N において,

$$\dim M + \dim N < \dim V$$

とする．このとき, 次を満たすような微分同相 $h : V \to V$ が存在する．

(1) $h(M) \cap N = \emptyset$ を満たす．
(2) h は id とアイソトピックである．

証明 部分多様体 M の管状近傍をとり, ファイバー方向にベクトル場を流して局所的にずらしていけばよい．ずらす方向を見つける際に Sard の定理を用いる． ■

等位面におけるアイソトピーがあると, それを用いて勾配状ベクトル場を“ねじる”ことができる．

補題 4.3 三つ組 $(W; V_0, V_1)$ とその上の Morse 関数 f および勾配状ベクトル場 X が与えられているとする．また, b を f の正則値とし, $V := f^{-1}(b)$ において id とアイソトピックな微分同相 $h : V \to V$ があったとしよう．このとき, $f^{-1}[a, b]$ 内に臨界点がないような $a(< b)$ に対して, 次を満たすような f の勾配状ベクトル場 $\bar{X}$ が存在する．

(1) $f^{-1}(a, b)$ を除いた集合上で $\bar{X} = X$ が成り立つ．
(2) X, $\bar{X}$ の積分曲線がつくる微分同相 φ, $\bar{\varphi} : f^{-1}(a) \to V$ は $\bar{\varphi} = h \circ \varphi$ を満たす．

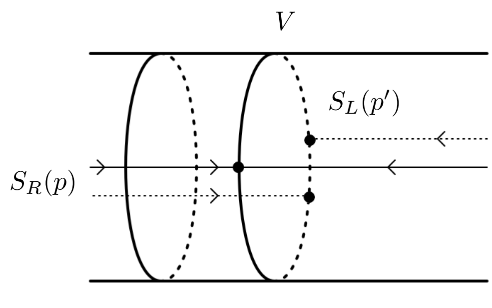

図 14　ねじる前

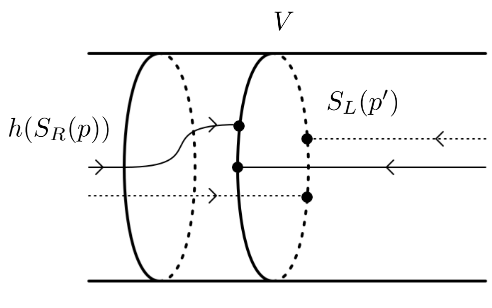

図 15　ねじった後

証明 アイソトピーが時間変化していく様子を積同境 $f^{-1}[a, b]$ で表して, それを用いてベクトル場を変形させればよい．具体的には次のように構成する．

仮定より, アイソトピー $h_t : V \times [a, b] \to V$ であって, $h_a = \mathrm{id}$, $h_b = h$ となるものがとれる．必要ならば隆起関数を用いることで, $t = a$ の近傍で常に $h_t = \mathrm{id}$, $t = b$ の近傍で常に $h_t = h$ が成り立つようにする．正規

化されたベクトル場 $\hat{X} := X/X(f)$ の積分曲線を用いることで, 微分同相

$$\phi : V \times [a,b] \to f^{-1}[a,b]$$

であって, $f(\phi(q,t)) = t$, $\phi(-,b) = \mathrm{id}$ となるものが構成できる. 先ほどのアイソトピー h_t を用いて, $V \times [a,b]$ の微分同相写像 H を

$$H(q,t) := (h_t(q), t)$$

と定める. 以上の準備のもと, ベクトル場 X を $f^{-1}[a,b]$ 上で $(\phi \circ H \circ \phi^{-1})_* \hat{X}$ に変えたものを $\bar{X}$ とおけば, これが欲しかったベクトル場となる. ■

以上二つの補題を用いることで, 勾配状ベクトル場を局所的に変形させて $S_R(p) \cap S_L(p') = \emptyset$ とすることができる. すなわち,

$$K_p \cap K_{p'} = \emptyset$$

となる. 以上の議論と定理 4.1 を有限回繰り返して用いることで, 次の定理が証明された.

定理 4.4 (Final Rearrangement Theorem) 三つ組 c 上の Morse 関数が与えられたとき, 指数順に臨界値を並べ替えることができる. 特に,

$$c = c_0 \cdots c_n$$

と分解することができる. ここで, $n := \dim c$ であり, 各 c_i 上に Morse 関数を制限すると, 臨界点の指数はどれも i であって臨界値はどれも等しい.

5 First Cancellation Theorem

前節で任意の同境を指数順に初等的同境の合成に分解できることを証明した. 次に考えたいのが, 二つの初等的同境の合成がいつ積同境になるか, という問題である. この節を通して, 三つ組 $(W; V_0, V_1)$ には臨界点が p, p' の二つしかない Morse 関数 $f : W \to [0,1]$ が存在して, $f(p) < 1/2 < f(p')$ を満たしているとしよう. また, $V := f^{-1}(1/2)$ とし, p と p' の指数を λ, $\lambda+1$ とする. X を f の勾配状ベクトル場としよう.

前節で本質的だった右向き球面 $S_R(p)$ と左向き球面 $S_L(p')$ の次元の関係式が

$$\dim S_R(p) + \dim S_L(p') = \dim V$$

となっていることに注意しよう. 今回も同様に共通部分 $S_R(p) \cap S_L(p')$ の様子を扱いやすいものにしたい. そこで重要となるのが次の**横断性** (transversality) の概念である.

定義 5.1 (横断性) 多様体 V の部分多様体 M, N において,

$$\dim M + \dim N = \dim V$$

を満たしているとする. このとき, 任意の $p \in M \cap N$ において $T_pM \oplus T_pN = T_pV$ を満たすとき, M と N は V の中で横断的に交わる (transversaly intersect) という.

前節と全く同様に次の補題が証明される.

補題 5.2 多様体 V の部分多様体 M, N において,

$$\dim M + \dim N = \dim V$$

とする. このとき, 次を満たすような微分同相 $h : V \to V$ が存在する.

(1) $h(M)$ と N は V の中で横断的に交わる.
(2) h は id とアイソトピックである.

そこで, 補題 4.3 を用いることで, 以降は常に $S_R(p)$ と $S_L(p')$ が横断的に交わるとしてよい. するとコンパクト性から, 共通部分 $S_R(p) \cap S_L(p')$ が有限個の点となって非常に調べやすくなる. 特に, 共通部分が一点のときは次の重要な定理が成り立つ.

定理 5.3 (First Cancellation Theorem) 上の状況において $S_R(p)$ と $S_L(p')$ が唯一点で横断的に交わるとき, 臨界点を持たない W 上の Morse 関数とその勾配状ベクトル場であって, ∂W のある近傍で f および X と一致しているものが存在する. 特に, W は積同境と微分同相となる.

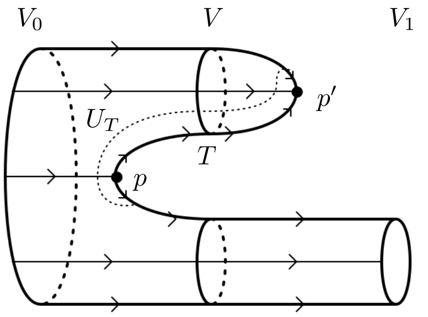

図 16　変形前

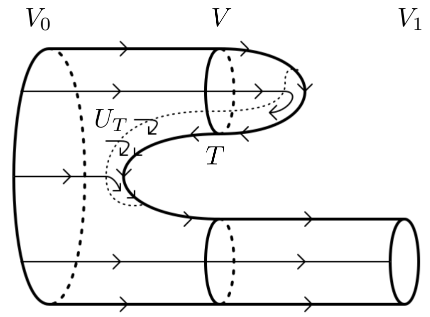

図 17　変形後

証明　p と p' を結ぶ積分曲線がただ一つ存在するのでそれを T とおく. 次の補題で構成されるような T を含む座標近傍を用いて, 勾配状ベクトル場を図のように局所的に変形させて, 勾配状ベクトル場を V_0 から V_1 まで留まることなく流れさせるようにし, その積分曲線を用いて積同境との微分同相をつくる, というのが概略である. ■

補題 5.4 積分曲線 T を含む近傍 U_T と座標関数 $g : U_T \to \mathbb{R}^n$ であって, 次を満たすものが存在する.

(1) $g(p) = (0, \ldots, 0)$, $g(p') = (1, 0, \ldots, 0)$ を満たす.
(2) 座標を $g(q) = (x_1, \ldots, x_n)$ と表したとき,

$$g_* X(q) = (v(x_1), -x_2, \ldots, -x_\lambda, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \ldots, x_n)$$

を満たす. ここで, $v(x_1)$ とは開区間 $(0, 1)$ 上では正であって, $v(0) = v(1) = 0$ を満たし, それ以外では負となり, さらに $x_1 = 0, 1$ の近傍で $|\partial v / \partial x_1(x_1)| = 1$ となるような滑らかな関数である.

証明　Morse の補題から, p と p' まわりで同様の条件を満たすような座標近傍がとれる. 後は両者を積分曲線によって貼り合せればいいのだが, 証明の詳細は紙面の都合上割愛する. 詳細は [1] を参照せよ. ■

6 Second Cancellation Theorem

前節の定理を踏まえて, アイソトピーによって左向き球面を動かすことで, 右向き球面を唯一点で横断的に交わらせるにはどうすればいいか, という問題を考えよう. まずはその必要条件を述べるためにも, 次の**交叉数** (intersection number) の概念を導入しておこう.

定義 6.1 (交叉数) 多様体 V の部分多様体 M, N において,

$$\dim M + \dim N = \dim V$$

とし, M と N は V の中で横断的に有限個の点 $\{p_1, \ldots, p_m\}$ で交わっているとする. さらに, N には多様体として向きづけられていて, M の法バンドル $\nu(V/M)$ はバンドルとして向きづけられているとしよう.

このとき, 各 p_i において

$$T_{p_i}N = \nu(V/M)|_{p_i}$$

が横断性から成立している. そこで $I(M, N; p_i)$ を, 二つのベクトル空間の向きが一致しているときは $+1$, 一致していないときは -1 で定める. 以上の準備のもと, M と N の交叉数 $M \cdot N$ を

$$M \cdot N := \sum_{i=1}^{m} I(M, N; p_i)$$

と定義する. V が多様体として向きづけられているときは, 標準的に M と N の法バンドルに向きを入れられるので $N \cdot M$ が定義される. このときの交叉数の関係は

$$N \cdot M = (-1)^{st} M \cdot N$$

となることに注意しよう. ここで, $s := \dim M$, $t := \dim N$ とおいた.

よく知られているように, アイソトピーによって部分多様体を変形させても交叉数は不変である. これが交叉数を総和の形で定義する利点の一つでもある.

以上より, 次のことがわかった. アイソトピーによって左向き球面を動かすことで, 右向き球面を唯一点で横断的に交わらせるための必要条件は, 二つの球面の交叉数が ± 1 となることである.

それでは, 果たしてこれは十分条件だろうか. つまり, 互いに異なる符号で交叉している二点があったとき, その二つを対にして交叉を外すことはできるのだろうか.

このような交叉の解消問題は 1940 年代には既に Whitney によって考えられていたようである. 彼が出した結果は, 次元が十分に高くさらに単連結性が仮定されていると見事に交叉を解消できるというもので, 現在ではこの技法を Whitney のトリックということが多い.

定理 6.2 (Whitney のトリック) 閉多様体 M, M' が多様体 V $(\partial V = \emptyset)$ で横断的に交わっているとする. 以降, $\dim M = r$, $\dim M' = s$, $\dim V = r + s$ としよう. また, M は多様体として向きづけられていて, M' の法バンドルはバンドルとして向きづけられているとする. p, $q \in M \cap M'$ を異符号の交叉点とし, これらが次の仮定を満たしているとする.

(1) $r + s \geq 5$, $s \geq 3$ を満たす.
(2) $r = 1, 2$ のときは, 包含写像が誘導する準同型写像 $\pi_1(V - M') \to \pi_1(V)$ は単射である.

(3) V の中で可縮な閉道 L であって, それは M' 内で p から q を結び, M 内で q から p を結ぶような滑らかな埋め込みの道の合成であり, かつ $M \cap M' - \{p, q\}$ と交わらないものが存在する.

このとき, $M \cap M' - \{p, q\}$ のある近傍を固定するようなアイソトピー $h_t : V \to V$ であって, $h_0 = \mathrm{id}$, $h_1(M) \cap M' = M \cap M' - \{p, q\}$ を満たすものが存在する.

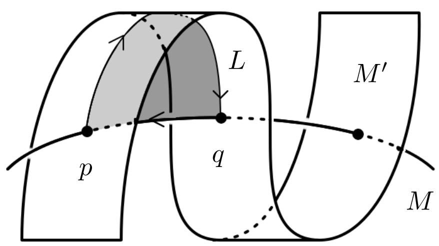

図 18　Whitney のトリック 前

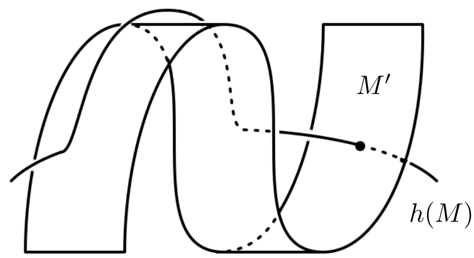

図 19　Whitney のトリック 後

注意 6.3 定理 6.2 において, M, および M' が連結で V が単連結であり, さらに $r \geq 2$ の場合は, 仮定 (3) は不要となる. 実際に, M および M' から $M \cap M' - \{p, q\}$ を取り除いた多様体も連結となるので, これらに完備な Riemann 計量を入れることで (3) にある閉道 L が構成できる.

証明　証明の大雑把な流れは次の通りである. まず, 定理の仮定を用いて, L を境界に持つような性質の良い円盤を見つけてくる. この円盤を以降 Whitney の円盤と名づけよう. 例えば, 図 18 で色をつけておいた円盤がその一例である. この円盤に沿って M を押し出していくことでアイソトピーが構成される.

Whitney の円盤が満たすべき性質は, 押し出す際に p, q 以外の交叉点を動かさないようにするためにも, 閉道 L 以外に M, M' と交わらず, かつ自己交叉を持たないということが必要である. そこに, この問題を高次元で考える理由がある. 5 次元以上でないと, Whitney の円盤を見つけられる保障が無くなるのである.

以下, Whitney の円盤の構成方法について簡単に説明しておく. 閉道の内側に向けて十分短い測地線を流すことで, 閉道 L とホモトピックな S^1 からの滑らかな埋め込み S をとっておく. 作り方から, この埋め込みは M および M' と交わらない. L が V で可縮であるという仮定より, 円盤 D への滑らかな拡張 $D \to V$ が取れる. ここで, 次の事実を思い出しておこう. この事実は「Whitney の埋め込み定理」を改良した主張である.

事実 6.4 (Whitney) 多様体 M_1 から M_2 への滑らかな写像 $f : M_1 \to M_2$ が, ある閉集合 $A \subset M_1$ 上で滑らかな埋め込みとなっているとする. $\dim M_2 \geq 2 \dim M_1 + 1$ のとき, 滑らかな埋め込み $g : M_1 \to M_2$ であって, $f|_A = g|_A$ を満たすものが存在する.

さて, 次元に関する仮定から, $\dim V \geq 5 = 2 \dim D + 1$ であるので, この事実を先ほどの拡張 $D \to V$ に適用することができる. これで, D が V に自己交叉なく埋め込まれたので, D の V における法バンドルをとることができる. 次元に関する仮定および基本群に関する仮定から, D を法バンドルのファイバー方向に少しずらすことで, M および M' と交わらないようにできる. これで Whitney の円盤が構成されたことになる.

円盤に沿って滑らかに動かすとは, 実際には円盤の近傍内にコンパクトな台を持つようなアイソトピーを構成することである. 簡単にその手順を説明しておく. まず, 閉道 L 上の各点で円盤と直交する連続的な枠を適

切に作っておく．L が可縮であることおよび次元の関係などから, この枠は円盤の内部にも拡張される．後はこの枠の方向に測地線を流すことで, 円盤の直積近傍が構成される．あとは, 円盤内で構成したアイソトピーを隆起関数によってその近傍に拡張させることで, 全体で滑らかなアイソトピーが完成する．

以上が証明の概略である．さらに詳しい解説を知りたい読者は [1] を参照せよ． ■

Whitney のトリックを用いると次が証明できる．

定理 6.5 (Second Cancellation Theorem) 三つ組 $(W; V_0, V_1)$ には臨界点が p, p' の二つしかない Morse 関数 $f : W \to [0, 1]$ が存在して, $f(p) < 1/2 < f(p')$ を満たしているとしよう．また, $V := f^{-1}(1/2)$ とし, p と p' の指数が λ, $\lambda + 1$ となっているとする．X を f の勾配状ベクトル場とする．V における $S_R(p)$ の法バンドル (作り方からこれは自明束である) および $S_L(p')$ の向きを一つ固定しておく．さらに, これらが次の仮定を満たしているとする．

(1) W, V_0, V_1 は単連結である．
(2) $n \geq 6$, $2 \leq \lambda < \lambda + 1 \leq n - 3$ を満たす．
(3) $S_R(p) \cdot S_L(p') = \pm 1$ を満たす．

このとき, V のアイソトピーによって $S_R(p)$ と $S_L(p')$ が唯一点で横断的に交わらせることができる．よって, 補題 4.3 と定理 5.3 を用いることで, 臨界点を持たない W 上の Morse 関数とその勾配状ベクトル場であって, ∂W のある近傍で f および X と一致しているものが構成できる．

注意 6.6 定理 6.5 の仮定から, V の単連結性が従う．実際, 第 3 節の内容から W と $D_R(p) \cup V \cup D_L(p')$ はホモトピー同値であることがわかるが, $D_R(p) \cap V = S_R(p)$ の次元は $n - \lambda - 1 \geq 3$ なので単連結であり, $D_L(p') \cap V = S_L(p')$ の次元は $\lambda \geq 2$ なので単連結となる．以上より Van Kampen の定理から $\pi_1(W) \cong \pi_1(V)$ となって V も単連結となる．

以上の注意のもと, 定理の証明に入ろう．

証明 定理 6.2 において, $M = S_L(p')$, $M' = S_R(p)$, $V = f^{-1}(1/2)$ として定理を適用する．つまり, $r = \lambda$, $s = n - \lambda - 1$ となる．

定理 6.2 の仮定を満たすことは, $\lambda \geq 3$ のときは容易にわかる．$\lambda = 2$ のときは, 定理 6.2 の仮定 (2), すなわち $V - S_R(p)$ の単連結性を証明しなければならない．まず, X の積分曲線によって, $V - S_R(p)$ は $V_0 - S_L(p)$ と微分同相となる．V_0 における $S_L(p)$ の開管状近傍を N とおくと, N は $S_L(p) \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$ と微分同相となる．よって, $\pi_1(N - S_L(p)) \cong \mathbb{Z}$ となる．後は, $V_0 = (V_0 - S_L(p)) \cup N$ に対して Van Kampen の定理を用いれば, $V_0 - S_L(p)$ の単連結性が従う．以上より, $V - S_R(p)$ の単連結性が証明された．これで, 定理 6.2 を用いることができることがわかった．異符号の交叉点のペアを繰り返し解消させていくことで, 交叉点を唯一つにすることができる．これで証明が完了した． ■

系 6.7 定理 6.5 の仮定 (2) を次の $(2)'$ に変えても主張は成り立つ．

$(2)'$ $n \geq 6$, $3 \leq \lambda < \lambda + 1 \leq n - 2$ を満たす．

証明 同境を“ひっくり返す”ことで簡単に証明される．詳細は以下のとおりである．

まず, 注意 6.6 から特に V は向きづけ可能であるので,

$$S_L(p') \cdot S_R(p) = \pm S_R(p) \cdot S_L(p') = \pm 1$$

となる. $(-f)$ は三つ組 $(W; V_1, V_0)$ 上の Morse 関数であり, 臨界点は p', p のみであり, 指数はそれぞれ $n-\lambda-1$, $n-\lambda$ となる. $(-X)$ はその勾配状ベクトル場となるが, $(-X)$ に対する p' の右向き球面は $S_L(p')$, p の左向き球面は $S_R(p)$ となるので, 後は仮定 $(2)'$ より

$$2 \leq n-\lambda-1 < n-\lambda \leq n-3$$

が従うことに注意して定理 6.5 を用いればよい. ■

7 Cancellation of Critical Points in the Middle Dimensions

前節では左向き球面と右向き球面の交叉数に着目することで臨界点を相殺させることができた. また, 第 3 節でも述べた通り左向き円盤や右向き円盤はその同境のホモロジー群に関する情報を持っている. この交叉数とホモロジー群の関係を解明させよう.

この節を通して, 三つ組 $c = (W; V, V')$ に定理 4.4 を適用して

$$c = c_0 \cdots c_n$$

と分解しておき, 各 $k = 0, \ldots, n$ に対して $c_0 \cdots c_k$ が実現する境界付き多様体を W_k としよう. なお, 便宜上 $k \leq -1$ に対しては $W_k := V$, $k \geq n+1$ に対しては $W_k := W_n = W$ と定めておく.

定義 7.1 チェイン複体 $C_* = \{C_k, \partial\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を次のように定義する. 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $C_k := H_k(W_k, W_{k-1})$ とおき, $\partial : C_k \to C_{k-1}$ を三対 (W_k, W_{k-1}, W_{k-2}) の完全系列における境界準同型写像とおく. これが実際にチェイン複体となること, すなわち $\partial^2 = 0$ となることは容易に確かめられる.

三対の完全系列と切除定理を組み合わせることで次の定理が証明できる.

定理 7.2 同型 $H_*(W, V) \cong H_*(C_*)$ が成り立つ.

第 3 節の内容と切除定理を組み合わせることで, 各 C_k は c_k に含まれる臨界点の左向き円盤が基底となることがわかる. 境界作用素 ∂ については次が成り立つ.

定理 7.3 境界作用素 ∂ の表現行列は, 交叉数 $S_R \cdot S_L$ を並べたものとなる.

また, 次の有名な事実も同境を“ひっくり返す”という単純なアイデアで比較的容易に証明される.

定理 7.4 (Poincaré-Lefschetz の双対定理) 三つ組 $(W; V, V')$ において, W が向きづけ可能であるとき,

$$H_i(W, V) \cong H^{n-i}(W, V')$$

が成り立つ. W が向きづけ可能でない場合でも $\mathbb{Z}/2$ 係数で同様の同型が成り立つ.

交叉数とホモロジー群の関係が解明されたところで次の定理を証明しよう.

定理 7.5 三つ組 $(W; V, V')$ が次を満たすとする.

(1) W, V, V' はどれも単連結である.
(2) $H_*(W, V) = 0$.
(3) $n = \dim W \geq 6$.
(4) 指数が 0, 1, $n-1$, n の臨界点を持たない Morse 関数が存在する.

このとき, W は積同境と微分同相である.

証明 定理 4.4 と仮定 (4) を用いて三つ組 $c = (W; V, V')$ を

$$c = c_2 \cdots c_{n-2}$$

と分解しておく. 定理 7.2 と仮定 (2) より,

$$0 \to C_{n-2} \to C_{n-3} \to \cdots \to C_3 \to C_2 \to 0$$

は完全系列である. 各 λ に対して, $\mathrm{Ker}(\partial : C_{\lambda+1} \to C_\lambda)$ の基底を $z_1^{\lambda+1}, \ldots, z_{k_{\lambda+1}}^{\lambda+1}$ とおこう. すると完全性より, 各 $1 \leq i \leq k_\lambda$ に対して $\partial(b_i^{\lambda+1}) = z_i^\lambda$ となるような $b_i^{\lambda+1} \in C_{\lambda+1}$ がとれるが, これらを集めた $z_1^{\lambda+1}, \ldots, z_{k_{\lambda+1}}^{\lambda+1}, b_1^{\lambda+1}, \ldots, b_{k_\lambda}^{\lambda+1}$ は $C_{\lambda+1}$ の基底をなす. ここで次の基底定理を証明しよう.

補題 7.6 (基底定理) 三つ組 $(W; V, V')$ 上に臨界点の指数がどれも λ であって臨界値が唯一つの Morse 関数とその勾配状ベクトル場が存在したとする. さらに, $2 \leq \lambda \leq n-2$ ($n := \dim W$) であって W は連結であるとする. このとき, $H_\lambda(W, V)$ の任意の基底に対して, Morse 関数とその勾配状ベクトル場を境界付近を除いて変形させることで, 臨界点と臨界値を変えずにその基底を新たな左向き円盤が実現するようにできる.

証明 行列の基本変形が実現されればいい. 行の並び替えは臨界点につける番号の並び替え, ある行を (-1) 倍する操作は円盤の向きの入れ替えにあたる. 後はある行を他の行に足すという操作が実現できればいいのだが, この証明は紙面の都合上割愛する. 詳細は [1] を参照せよ. ■

基底定理を用いて, c_λ と $c_{\lambda+1}$ が先ほどの基底を実現するようにとっておこう. z_1^λ と $b_1^{\lambda+1}$ に対応する臨界点をそれぞれ p, q とおく. 定理 4.1 を用いて $c_\lambda c_{\lambda+1} = c'_\lambda c_p c_q c'_{\lambda+1}$ と変形しておこう. ここで, c_p, c_q は各々臨界点が p, q のみの初等的同境である.

さて, 仮定 (1) と (3) から, 前節の議論と同様に $c_p c_q$ とその境界の単連結性が従う. また, $\partial(b_i^{\lambda+1}) = z_i^\lambda$ から $S_R(p) \cdot S_L(q) = \pm 1$ となることがわかる. よって, 定理 6.5 より $c_p c_q$ は積同境となる. この議論を繰り返していくことですべての臨界点を相殺させることができる. ■

8 Elimination of Critical Points of Index 0 and 1

前節を踏まえて, この節では指数 0, 1 を消去することを考えよう.

定理 8.1 (指数 0 の臨界点の消去) 三つ組 $c = (W^n; V, V')$ において, W は連結であって $V \neq \emptyset$ とすると, 定理 4.4 において指数 0 の同境 c_0 が存在しないような分解がとれる.

証明 定理 4.4 を用いて $c = c_0 \cdots c_n$ と分解しておく. W の連結性より, 指数 0 の臨界点 p を任意に一つとると, 指数 1 の臨界点 q であって, $D_L(q)$ が $D_R(p)$ と V をつなぐようなものが存在する. よって, 定理 5.3 より p と q は対にして消去できる. これを繰り返すことで指数 0 の臨界点を消去することができる. ■

定理 8.2 (指数 1 の臨界点の消去) 三つ組 $(W^n; V, V')$ において, W と V は単連結であって, $n \geq 5$ を満たすとする. このとき, 指数 0 の臨界点が全くないような Morse 関数が存在したとき, その関数を局所的に変形させて指数 2 と指数 3 の臨界点を挿入させることで, 指数 1 と指数 2 の臨界点を対にして消去することができる.

証明 証明の概略を述べる. 関数を局所的に "波打たせる" ことで, 指数 2 と指数 3 の臨界点をそれぞれ一つずつ挿入させることができる. 指数 1 の臨界点を任意に一つとると, 勾配状ベクトル場をアイソトピーによって局所的に変形させることで, その右向き球面と先ほど挿入した指数 2 の臨界点の左向き球面が横断的にただ一点で交わるようにすることができるので, 定理 5.3 を用いることで対にして消去できる. この議論を繰り返すことで, 結果的には指数 1 の臨界点が全て指数 3 にすり替わる. 詳細は [1] を参照せよ. ■

9 The h-cobordism Theorem and Some Applications

いよいよ, 今回の目標であった h 同境定理の証明を述べることができる.

定理 9.1 (h 同境定理) 三つ組 $(W; V, V')$ が次を満たすとする.

(1) W, V, V' はどれも単連結である.
(2) $H_*(W, V) = 0$.
(3) $\dim W \geq 6$.

このとき, W は積同境 $V \times [0, 1]$ と微分同相である. 特に, V と V' は微分同相である.

証明 定理 4.4 を用いて $(W; V, V')$ を分解する. 定理 8.1 より指数 0 の臨界点を消去できるので, さらに定理 8.2 から指数 1 の臨界点を消去できる. 三つ組 $(W; V', V)$ に対しても同様の操作を行うことで, $(W; V, V')$ の指数 n と指数 $n-1$ の臨界点を消去することができる. したがって, 定理 7.5 より W は積同境と微分同相となる. ■

■応用

命題 9.2 (D^n $(n \geq 6)$ の特徴づけ) コンパクトな多様体 W^n $(n \geq 6)$ とその境界 ∂W はどちらも単連結であるとする. このとき, 次は同値である.

(1) W は D^n と微分同相である.
(2) W は D^n と同相である.
(3) W は可縮である.
(4) W は一点と同じホモロジー群を持つ.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) は明らかなので, (4) $\Rightarrow$ (1) を証明しよう. 座標近傍を用いることで W に滑らかに埋め込まれているような n 次元閉円盤 D_0 がとれる. Van Kampen の定理より $W - \mathrm{Int}\, D_0$ は単連結である.

さて, 切除定理と空間対の完全系列から

$$H_*(W - \operatorname{Int} D_0, \partial D_0) \cong H_*(W, D_0) = 0$$

が成り立つ. よって, h 同境定理より $W - \operatorname{Int} D_0$ は積同境となる. つまり, $(W; \emptyset, \partial W)$ は積同境と $(D_0; \emptyset, \partial D_0)$ の合成となるので, W は D^n と微分同相となる. ■

命題 9.3 (一般 Poincaré 予想 (5 次元以上)) 単連結でホモロジー群が球面と等しい $n(\geq 5)$ 次元閉多様体は球面と同相である. もっと強く, $n = 5, 6$ のときは球面と微分同相となる.

証明 M^n を単連結でホモロジー群が球面と等しい閉多様体とする. 座標近傍を用いることで M に滑らかに埋め込まれているような n 次元閉円盤 D_0 がとれる. Van Kampen の定理より $M - \operatorname{Int} D_0$ は単連結である.

さて, Poincaré-Lefschetz の双対定理と切除定理, および空間対の完全系列から

$$H_i(M - \operatorname{Int} D_0) \cong H^{n-i}(M - \operatorname{Int} D_0, \partial D_0) \cong H^{n-i}(M, D_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ. したがって, $n \geq 6$ の場合は D^n の特徴づけから, $M - \operatorname{Int} D_0$ が D^n と微分同相であることがわかるので, M はねじった球面と微分同相となる. つまり, M は球面と同相である.

ここで, 次の事実を紹介しておく.

事実 9.4 M^n を単連結でホモロジー群が球面と等しい閉多様体とする. $n = 4, 5, 6$ のときは, コンパクトで可縮な $(n+1)$ 次元閉多様体であって, M を境界に持つようなものが存在する.

事実 9.4 より, $n = 5, 6$ のときは $\partial W = M$ となるような, コンパクトで可縮な $(n+1)$ 次元閉多様体 W が存在する. D^n $(n \geq 6)$ の特徴づけより W は D^n と微分同相であるので, M は球面と微分同相であることがわかった. 以上より, 一般 Poincaré 予想が証明された. ■

参考文献

[1] John Milnor, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton University Press, 1965 年.

[2] John Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1963 年.

[3] 松本幸夫, 4 次元のトポロジー 増補版, 日本評論社, 2009 年.

[4] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波書店, 1977 年.

[5] 日本数学会, 岩波数学辞典 第 4 版, 岩波書店, 2007 年.